Quelques remarques en ce qui concerne le devoir (exercice n°2)

Quelques règles et principes commodes à appliquer :

1) les formules de base (formules atomiques) **sont toujours de la forme** $P(a_1, \ldots, a_n)$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des **individus** (**constantes** ou **variables**, *voire quelquefois* **termes composés** comme lorsque par exemple on introduit dans le langage des symboles qui représentent *des fonctions* de l'ensemble des individus dans lui-même, par exemple `père_de` ou `mère_de` est une telle fonction : `mère_de` est la fonction qui à tout individu associe sa mère (qui est elle-même un individu) – remarquer qu'alors on peut composer les fonctions : `mère_de(mère_de(Paul))` désigne la mère de la mère de Paul autrement dit la grand-mère maternelle de Paul), et où P est un symbole de prédicat n-aire.
Exemple : regarde(pierre, marie), regarde(x, y), regarde(x, père_de(père_de(x))) etc.

2) on ne peut pas simplement juxtaposer deux formules atomiques.
`(etudiant(x), a_ri(x))` n'a pas de sens. Quand on veut exprimer quelque chose en utilisant plusieurs formules atomiques, il faut nécessairement utiliser des symboles logiques (connecteurs). Par exemple `(etudiant(x)`∧ `a_ri(x))` et `(etudiant(x)`⇒ `a_ri(x))` ont un sens.

3) une formule qui contient une variable libre (non liée par un quantificateur) n'est pas une proposition complète (au sens où sa valeur de vérité est variable, au lieu d'être une constante – 1 ou 0 -). Par exemple pour avoir une proposition complète (une formule close) avec
`etudiant(x)`⇒ `a_ri(x),` il faut rajouter devant un quantificateur. Par exemple :
c'est le cas pour `(`∀`x) (etudiant(x)`⇒ `a_ri(x)).`

4) En général, quand on a un quantificateur universel (∀), la formule qui vient après est soit une formule atomique (exemple : `(`∀`x) étudiant(x) : tout le monde est étudiant` (dans l'univers considéré)), soit une formule implicationnelle (dont le connecteur principal est : ⇒), par exemple : (∀x) `(etudiant(x)`⇒ `a_ri(x)) : tous les étudiants ont ri.`
Si on avait un autre connecteur, par exemple : (∀x) `(etudiant(x)`∧ `a_ri(x)),` on obtiendrait un sens très différent (ici : `tout le monde est étudiant qui rit`). Bien sûr on pourrait avoir un « ou » puisque nous savons que $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$, auquel cas une forme synonyme de : `(`∀`x) (etudiant(x)`⇒ `a_ri(x))` serait : `(`∀`x) (`¬ `etudiant(x)`∨ `a_ri(x))` dont le sens, littéralement, est : `tout individu rit ou bien n'est pas étudiant` ce qui signifie la même chose que `tous les étudiants ont ri.`

Quand on a un quantifieur existentiel (∃), on a plutôt en général derrière lui une formule conjonctive (dont le connecteur principal est : ∧`)`. Par exemple :
`(`∃`x)(etudiant(x)`∧ `a_ri(x)) : il y a un étudiant qui a ri.`
Si on avait un autre symbole, là aussi, on obtiendrait un autre sens, par exemple :
`(`∃`x)(etudiant(x)` ⇒ `a_ri(x)) : il y a quelqu'un, s'il est un étudiant alors il a ri,` ce qui ne veut pas dire du tout la même chose.
On a vu en cours que pour que la deuxième formule soit vraie, il suffit qu'il **n'**y ait **pas** d'étudiant dans l'univers (!), alors qu'au contraire pour que la première soit vraie **il est nécessaire qu'il y en ait au moins un** !

5) Nous avons vu en cours que :

(a) `Tous les chats sont gris` se traduit par : $\forall x\ (\mathrm{chat}(x) \Rightarrow \mathrm{gris}(x))$

Mais que (b) `seul un chat est gris` (au sens où seul un chat peut être gris) se traduirait par : $\forall x\ (\mathrm{gris}(x) \Rightarrow \mathrm{chat}(x))$

Autrement dit : `pour tout x, si c'est gris alors c'est un chat.`

(c) `Les seuls animaux gris sont les chats` se traduit par : $\forall x\ (\mathrm{gris}(x) \Leftrightarrow \mathrm{chat}(x))$ car il y a deux affirmations dans cette phrase : d'une part tous les chats sont gris, d'autre part, il n'y a qu'eux qui soient gris.

6) quand on dit : `exactement un étudiant a ri,` ce qu'on dit c'est :

1. d'une part il y a un étudiant qui a ri
2. d'autre part, il est le seul. Autrement dit, tout étudiant ayant ri est nécessairement cet étudiant-là.

Exemple : `il y a un seul losange` (sur la table, parmi d'autres volumes) se traduit par :

$(\exists x)\ \mathrm{losange}(x) \wedge (\forall y)(\mathrm{losange}(y) \Rightarrow (y = x))$