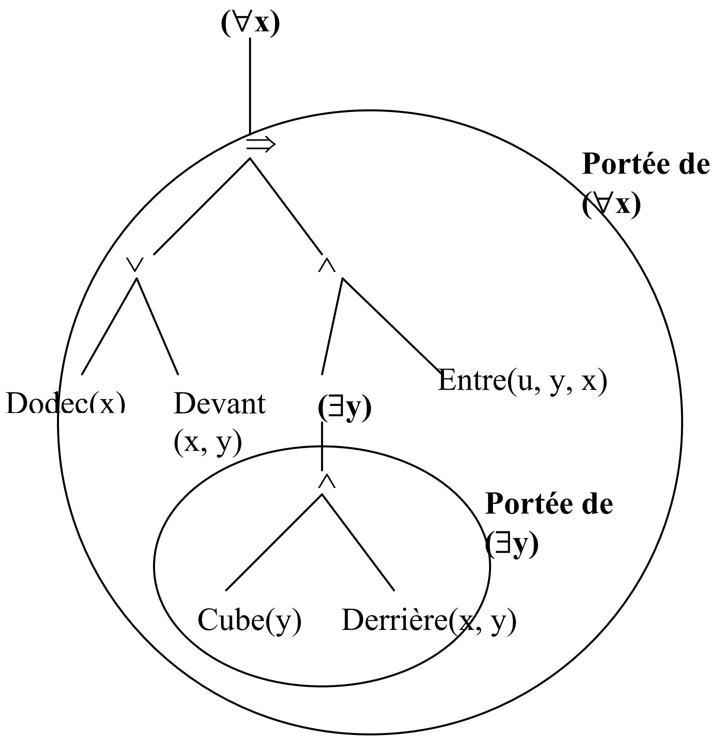
Exercices corrigés de logique du premier ordre

1- Analyser les formules suivantes (dire si ce sont des formules, donner arbres, occurrences libres, occurrences liées, identifier la portée de chaque quantificateur) :
   a. $(\forall x)\ ((\text{Dodec}(x) \vee \text{Devant}(x, y)) \Rightarrow ((\exists y)\ (\text{Cube}(y) \wedge \text{Derrière}(x, y)) \wedge \text{Entre}(u, y, x)))$
   b. $(\forall x)\ (\text{Dodec}(x) \vee \text{Devant}(x, y) \Rightarrow ((\exists y)\ (\text{Cube}(y) \wedge \text{Derrière}(x, y)) \wedge \text{Entre}(u, y, x)))$
   c. $(\forall x)\ (\text{Dodec}(x) \vee (\text{Devant}(x, y) \Rightarrow ((\exists y)\ (\text{Cube}(y) \wedge \text{Derrière}(x, y)) \wedge \text{Entre}(u, y, x))))$
   d. $(\exists x)\ (\exists y)\ (x \neq y \wedge (\forall w)\ (((w = x \vee w = y) \vee w = u) \Rightarrow (\forall z)\ \neg\text{Derrière}(z, w) \wedge \text{Devant}(x, u))$
   e. $(\exists x)\ (\exists y)\ (x \neq y \wedge (\forall w)\ (((w = x \vee w = y) \vee w = u) \Rightarrow (\forall z)\ (\neg\text{Derrière}(z, w) \wedge \text{Devant}(x, u))))$

(a) arbre des sous-formules :



Commentaire :

- Toutes les occurrences de x sont liées (par $(\forall x)$)
- La première et la quatrième occurrences de y sont libres
- Les autres occurrences de y sont liées (par $(\exists y)$
- La seule occurrence de u est libre

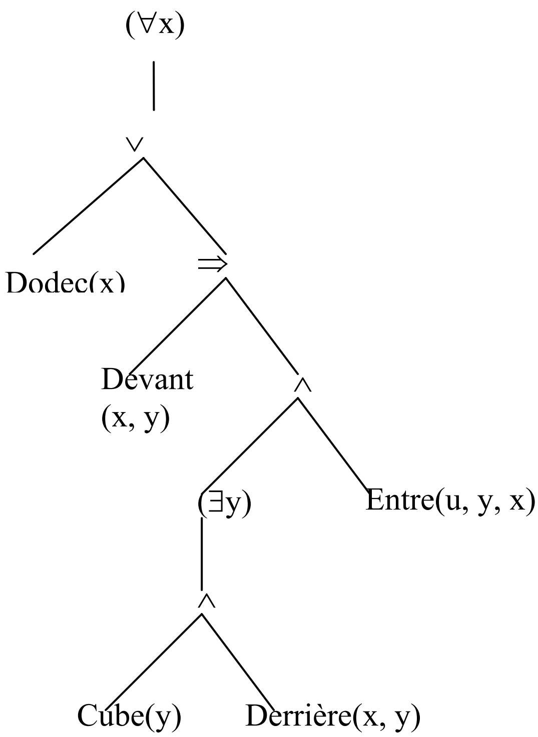
Si on veut éviter d'avoir une variable dont certaines occurrences sont libres et d'autres liées, on peut procéder à un renommage. On peut par exemple renommer toutes les occurrences liées de y par une nouvelle variable, par exemple z, et on obtient :

$(\forall x)\ ((\text{Dodec}(x) \vee \text{Devant}(x, y)) \Rightarrow ((\exists z)\ (\text{Cube}(z) \wedge \text{Derrière}(x, z)) \wedge \text{Entre}(u, y, x)))$

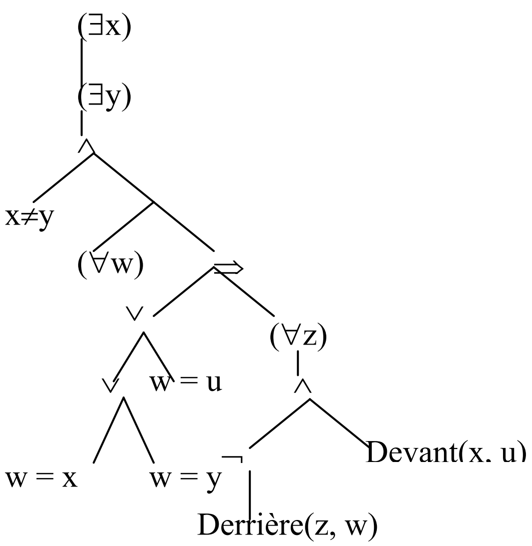
qui a le même « sens » que la formule originale (ceci ne pourra être vérifié que grâce à la méthode d'évaluation des formules par rapport à une structure). Dans cette nouvelle formule : x et z sont des variables liées (toutes leurs occurrences sont liées), y et u sont libres.

(b) : n'obéit pas à la syntaxe des formules, il manque des parenthèses, conséquence : ambiguïté de lecture, cf. $(A \wedge B \Rightarrow C)$ peut se lire $((A \wedge B) \Rightarrow C)$ ou $(A \wedge (B \Rightarrow C))$.

(c)



(d) manque également de parenthèses
(e) nous allons admettre que la négation porte sur la formule atomique



Toutes les occurrences de x et de y sont liées par un ∃. Celles de w et de z sont liées par un ∀. u est libre. Cette formule s'appliquerait donc à un objet u pour lequel il existe deux objets x et y distincts tels que tout volume qui soit indifféremment x, y ou u ne soit derrière aucun objet, avec x devant u. (Essayer de dessiner une telle situation !)

2- Traduire les phrases suivantes :

a. *Seuls les grands volumes n'ont rien devant eux*

$$(\forall x)((\neg(\exists y)Devant(y,x)) \Rightarrow Grand(x))$$

b. *Si un cube a quelque chose devant lui alors il est petit*

$$(\forall x)((\exists y)((Cube(x) \wedge Devant(y,x)) \Rightarrow Petit(x))$$

c. *Si e est entre deux objets alors ils sont tous les deux petits*

$$((\exists x)(\exists y)Entre(e,x,y) \Rightarrow (Petit(x) \wedge Petit(y)))$$

d. *Tout dodécaèdre est au moins aussi grand que tout cube*

$$(\forall x)(\forall y)((Dodec(x) \wedge Cube(y)) \Rightarrow PGQ(x,y))$$

e. *Les seuls grands cubes sont b et c*

$$(\forall x)((Grand(x) \wedge Cube(x)) \Leftrightarrow ((x=b) \vee (x=c)))$$

f. *Au plus b et c sont de grands cubes*
[attention : dans cette dernière phrase, b et c peuvent très bien ne pas être de grands cubes !]

$$(\forall x)((Grand(x) \wedge Cube(x)) \Rightarrow ((x=b) \vee (x=c)))$$

g. *Tout cube en arrière d'un dodécaèdre est plus petit que lui*

$$(\forall x)(\forall y)(((Cube(x) \wedge Dodec(y)) \wedge Derrière(x,y)) \Rightarrow PPQ(x,y))$$

3- quelles sont les différentes lectures des phrases suivantes :

a. trois déménageurs ont soulevé trois pianos

On a le choix entre :

- à chaque déménageur correspondent trois pianos – d'où : au total 9 pianos !
- trois pianos correspondent au groupe de trois déménageurs pris collectivement – d'où : au total 3 pianos

La première interprétation est dite *distributive*
La seconde est dite *collective*
Noter qu'il est difficile d'imaginer des cas intermédiaires… Par exemple si deux déménageurs se mettent ensemble pour déménager 3 pianos et l'autre à lui tout seul en déménage 3, ce qui fait au total 6 pianos, il sera difficile de dire « trois déménageurs ont soulevé trois pianos » ! autrement dit, on ne mélange pas les deux types d'interprétation.

b. *mettre huit gouttes de médicaments dans trois cuillérées d'eau*

Cas semblable, mais plus amusant. Dans un cas, on a 24 gouttes et dans l'autre 8.

4- combien trouvez-vous de lectures différentes pour les phrases suivantes :

a. *chaque professeur a donné un livre à chaque étudiant*

Cette phrase comporte trois quantificateurs, portant sur trois variables différentes (pour respectivement un professeur x, un livre y, un étudiant z). Il y a deux ∀ et un ∃. A priori on peut prévoir les 6 permutations possibles :
(∀x)(∀z)(∃y), (∀z)(∀x)(∃y)
(∀x)(∃y)(∀z), (∀z)(∃y)(∀x),
(∃y)(∀x)(∀z), (∃y)(∀z)(∀x)
Mais on sait qu'il est possible de permuter sans dommage deux quantificateurs de même type qui se suivent, autrement dit les lectures (∀x)(∀z)(∃y) et (∀z)(∀x)(∃y) sont identiques, de même que (∃y)(∀x)(∀z) et (∃y)(∀z)(∀x). On obtient donc **quatre lectures** différentes :

- (∀x)(∀z)(∃y) :

$(\forall x)(\forall z)((prof(x) \wedge étudiant(z)) \Rightarrow (\exists y)(livre(y) \wedge donne(x, y, z)))$

Le livre donné dépend du professeur ***et*** de l'étudiant

- (∀x)(∃y)(∀z) :

$(\forall x)(professeur(x) \Rightarrow ((\exists y)livre(y) \wedge (\forall z)(étudiant(z) \Rightarrow donne(x, y, z))))$

Le livre ne dépend que du professeur

- (∀z)(∃y)(∀x) :

$(\forall z)(étudiant(z) \Rightarrow ((\exists y)livre(y) \wedge (\forall x)(professeur(x) \Rightarrow donne(x, y, z))))$

Le livre ne dépend que de l'étudiant

- (∃y)(∀x)(∀z) :

$(\exists y)(livre(y) \wedge (\forall x)(\forall z)((professeur(x) \wedge étudiant(z)) \Rightarrow donne(x, y, z)))$

Il y a un seul livre, que chaque professeur donne à chaque étudiant.

b. *chaque professeur a donné un livre à un étudiant*

Même raisonnement, il y a **quatre lectures** possibles, correspondant aux schémas ∀∃∃, ∃l∀∃e, ∃e∀∃l, ∃∃∀. (respectivement : le livre et l'étudiant dépendent du professeur, il y a un livre que tout professeur donne à un étudiant (l'étudiant dépend du choix du professeur), il y a un étudiant à qui chaque professeur donne un livre (le livre dépend du professeur), il y a un livre et un étudiant qui sont tels que chaque professeur donne ce livre à l'étudiant (toujours le même)).

c. *un professeur a donné un livre à un étudiant*

schéma ∃∃∃ : une seule lecture.

d. *chaque professeur a donne chaque livre à chaque étudiant*

schéma ∀∀∀ : une seule lecture.

5- idem pour les phrases :

a. *je n'ai pas donné quelque chose à quelqu'un*

Les ingrédients sont ici : une négation et deux quantificateurs existentiels, soit : ¬,(∃x), (∃y). Admettons que x soit la chose et y la personne. Formellement on a les lectures :

- ¬(∃x)(∃y) :

$\neg(\exists x)(\exists y)donne(je, x, y)$

Il n'est pas vrai que j'ai donné quelque chose à quelqu'un, ou :
Je n'ai rien donné à personne

- $(\exists x)\neg(\exists y)$:

$(\exists x)(\neg(\exists y) donne(je, x, y))$

Il y a quelque chose que je n'ai donné à personne

- $(\exists y)\neg(\exists x)$:

$(\exists y)(\neg(\exists x) donne(je, x, y))$

Il y a quelqu'un à qui je n'ai rien donné

- $(\exists x)(\exists y)\neg$:

$(\exists x)(\exists y)(\neg donne(je, x, y))$

Il y a une chose particulière et une personne particulière, je n'ai pas donné cette chose à cette personne.

b. *Marie n'a rien raconté à quelqu'un*

Cas semblable, on a le choix entre :

- $\neg(\exists x)(\exists y) a\_raconté(Marie, x, y)$ ou $(\forall x)(\forall y)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

Marie n'a rien raconté à personne

- $(\exists y)\neg(\exists x) a\_raconté(Marie, x, y)$ ou $(\exists y)(\forall x)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

Il y a quelqu'un à qui Marie n'a rien raconté

Les lectures :

$(\exists x)\neg(\exists y) a\_raconté(Marie, x, y)$

$(\exists x)(\exists y)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

sont impossibles.

c. *Marie n'a raconté quelque chose à personne*

Cas semblable, on a le choix entre :

- $\neg(\exists x)(\exists y) a\_raconté(Marie, x, y)$ ou $(\forall x)(\forall y)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

Marie n'a rien raconté à personne

- $(\exists x)\neg(\exists y) a\_raconté(Marie, x, y)$ ou $(\exists x)(\forall y)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

Il y a quelque chose que Marie n'a raconté à personne

Les lectures :

$(\exists y)\neg(\exists x) a\_raconté(Marie, x, y)$

$(\exists y)(\exists x)(\neg a\_raconté(Marie, x, y))$

sont impossibles.

6- idem pour les phrases :

a. *Jean croit que quelqu'un le persécute*

Imaginons un prédicat du second ordre *CROIT*, alors on aurait :

CROIT(Jean, $(\exists x) persecute(x, Jean)$) ou bien :

$(\exists x) CROIT(Jean, persecute(x, Jean))$

La première lecture est dite *de dicto*, la seconde est dite *de re*.

b. *Jean croit qu'un professeur a donné un livre à chaque étudiant*

Très nombreuses lectures….

CROIT(Jean, ∃p∃l∀) CROIT(Jean, ∃p∀∃l) CROIT(Jean, ∃l∀∃p)
∃p CROIT(Jean, ∃l∀) ∃p CROIT(Jean, ∀∃l) ∃l CROIT(Jean, ∀∃p)
∃l CROIT(Jean, ∃p ∀) ∃p∀∃l CROIT(Jean, donne(x,y,z)) ∃l∀∃p CROIT(Jean, donne(x,y,z))
∃p∃l CROIT(Jean, ∀)

CROIT(Jean, ∀∃p∃l)
∀∃p CROIT(Jean, ∃l)

∀∃p ∃l CROIT(Jean,donne(x,y,z))

Question ouverte :
Est-ce que CROIT(Jean, (∀x)P(x)) ≈ (∀x) CROIT(Jean, P(x)) ?
Si ce n'est pas le cas, cela fait encore plus de lectures !

7- Traduire en logique des prédicats la phrase :
   a. *Certaines puces sont telles que pour chacune d'elles nous pouvons en trouver une qui soit plus petite*

$(\exists X)(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X \wedge y < x))$

Remarque : dans cette formalisation, nous sommes obligés de dépasser le cadre de la logique du premier ordre puisque nous utilisons une variable d'ensemble X, ainsi que le symbole d'appartenance.

8- Traduire en logique des prédicats les phrases :
   a. *Tout écrivain qui possède un chat écrit des romans*

$(\forall x)((\acute{e}crivain(x) \wedge (\exists y)(chat(y) \wedge poss\grave{e}de(x, y))) \Rightarrow \acute{e}crit\_romans(x))$

   b. *Tout écrivain qui possède un chat aime passer du temps à le caresser*

- Attention :

$(\forall x)((\acute{e}crivain(x) \wedge (\exists y)(chat(y) \wedge poss\grave{e}de(x, y))) \Rightarrow caresse(x, y))$ ne marche pas !
(la deuxième occurrence de y est libre)

- Seule traduction possible :

$(\forall x)(\forall y)((\acute{e}crivain(x) \wedge (chat(y) \wedge poss\grave{e}de(x, y))) \Rightarrow caresse(x, y))$

9- Traduire en français usuel :
   a. (∃x) (∃y) (∃z) (Cube(x) ∧ (Dodec(y) ∧ Tet(z)))

Il y un cube, un dodécaèdre et un tétraèdre

   b. (¬(∃x) Grand(x))

Il n'y a pas de grand volume, ou : aucun volume n'est grand

   c. (∀x) (Dodec(x) ⇒ (∃y) (Cube(y) ∧ Derrière(x, y)))

Tout dodécaèdre est derrière un cube

   d. (∀x) (Tet(x) ⇒ (∃y) (∃z) Entre(x, y, z))

Tout tétraèdre est entre deux objets

   e. (∀x) (∀y) (∀z) (Entre(x, y, z) ⇒ Plus_Grand_que(x, y))

Tout objet est plus grand qu'un des objets entre lesquels il se trouve

   f. (∃x) (∃y) (x ≠ y ∧ (∀w) ((w = x ∨ w = y) ⇒ (∀z) ¬Derrière(z, w)))

Il y a au moins deux objets qui n'ont rien derrière eux

   g. (∀x) (Cube(x) ⇔ (∃y) (Tet(y) ∧ Derrière(y, x)))

Les cubes sont exactement les volumes qui ont derrière eux un tétraèdre

   h. (∀x) (∀y) (Plus_Grand_que(x, y) ⇒ (∃z) Entre(x, y, z))

Tout objet plus grand qu'un autre est entre cet autre et un troisième

   i. (¬(∀x) (∀y) (A_Gauche_de(x, y) ∨ A_Droite_de(x, y)))

Il n'est pas vrai que tout couple d'objet soit tel que l'un soit forcément à gauche de l'autre

   j. (∃x) (∃y) (¬(Devant(x, y) ∨ Derrière(x, y)))

Il y a des couples d'objets tels que l'un ne soit pas devant l'autre

10- Expliquer les différences entre :

a. $(\exists x)\ (\text{Dodec}(x) \wedge \text{Grand}(x))$ et
b. $(\exists x)\ (\text{Dodec}(x) \Rightarrow \text{Grand}(x))$

(a) signifie : il y a un grand dodécaèdre. Elle est évaluée à « vrai » par rapport à toute structure où il y a un grand dodécaèdre.
(b) signifie : il y a un objet, si c'est un dodécaèdre, alors il est grand. Elle est évaluée à « vrai » en particulier par rapport à une structure où ***il n'y a pas*** *de grand dodécaèdre (contrairement à (a)), mais aussi… par rapport à toute structure où il y a un volume qui* ***n'est pas*** *un dodécaèdre ! En effet, il suffit de prendre pour x ce volume-là, et alors nécessairement l'antécédent étant faux, l'implication est vraie.*
On peut donc trouver une structure M qui soit un modèle pour (b) mais pas pour (a), ce qui suffit à prouver que ces deux formules n'ont pas la même signification. Toutefois, chaque fois que (a) est vraie, (b) l'est aussi. En effet, s'il y a un grand dodécaèdre, pour prouver (b), il suffit de se placer dans le cas où x est justement ce volume-là.

ainsi qu'entre :

c. $(\forall x)\ (\text{Tet}(x) \wedge \text{Petit}(x))$ et
d. $(\forall x)\ (\text{Tet}(x) \Rightarrow \text{Petit}(x))$

(c) signifie que tous les objets du domaine sont des petits tétraèdres, alors que (d) signifie que tous les tétraèdres sont petits. Une structure M où tous les tétraèdres seraient petits mais où il y aurait également d'autres volumes rendrait vraie la formule (d) mais rendrait fausse la formule (c). Mais là encore, si (c) est vraie, alors (d) l'est nécessairement aussi.