Logique

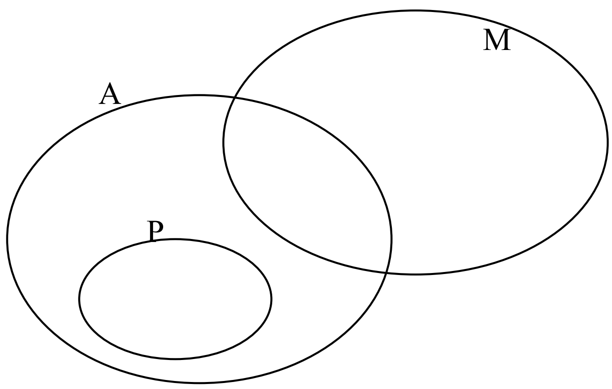
Cours de Licence de Sciences du Langage (L2)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

Corrigé du devoir n°1

1- Donner une représentation au moyen d'un diagramme de la situation formée par les trois ensembles : P (les poissons), A (les animaux aquatiques), M (les mammifères) de telle sorte que les phrases suivantes soient vraies :

- *les poissons sont des animaux aquatiques*
- *il y a des mammifères aquatiques*
- *aucun poisson n'est un mammifère*

$P \subset A$
$M \cap A \neq \phi$
$M \cap P = \phi$



2- Une expression booléenne (ou ensembliste) sera dite simplifiée si elle contient le moins possible de symboles (donc la plus courte possible). Simplifier les expressions suivantes :

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$$
$$((A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})) \cup (B \cap (\overline{C} \cup \overline{B}))$$

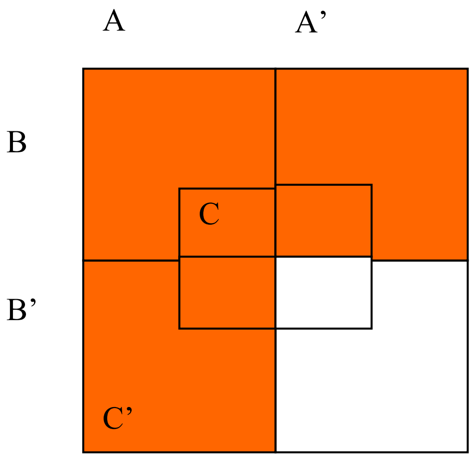
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \phi = A$
Par distributivité de l'union par rapport à l'intersection et parce que ∅ est neutre pour l'union.

$$((A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})) \cup (B \cap (\overline{C} \cup \overline{B})) = ((A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})) \cup ((B \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{B})) =$$
$$((A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cap C) \cup (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap C) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C}) =$$
$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cap C) \cup B(C \cup \overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap C) \cup B(\overline{A} \cup 1) =$$
$$(A \cap C) \cup (B \cap 1) = (A \cap C) \cup B$$

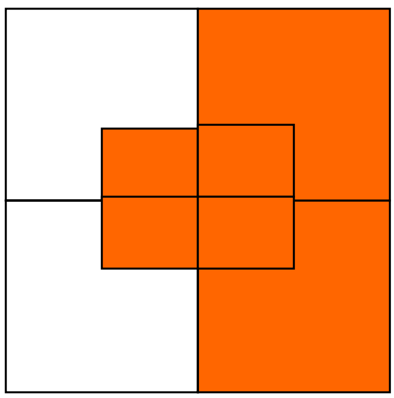
Remarque : première égalité : distributivité de l'intersection par rapport à l'union, deuxième égalité : $B \cap \overline{B} = \phi$ et $\varnothing$ est neutre, troisième égalité : distributivité de l'intersection par rapport à l'union, quatrième égalité : $A \cap \overline{A} = \phi$ et $\varnothing$ est neutre, cinquième égalité : mise en facteur de B (distributivité), sixième égalité : $C \cup \overline{C} = 1$, septième égalité : 1 est élément absorbant de l'union, huitième égalité : 1 est élément neutre de l'intersection.

On pouvait utiliser les diagrammes de Lewis Carroll, par exemple pour la deuxième expression :

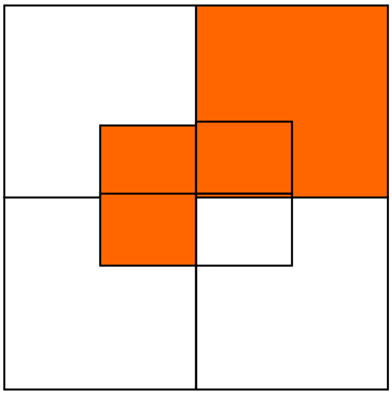
A ∪ B :



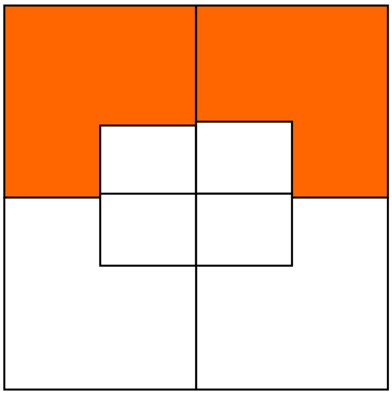
C ∪ A'



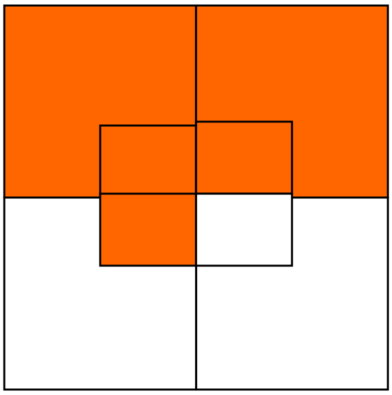
Intersection des deux :



B ∩(C'∪B') :



Réunion :



3- Une expression ensembliste est dite mise sous la forme d'un polynôme si elle est égale à l'union d'un nombre fini d'intersections d'ensembles de base (on appelle « ensembles de base » ceux qui sont juste représentés par des lettres : A, B, C, … ou des lettres avec une barre : $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\ldots$) par exemple l'expression suivante est sous la forme d'un polynôme : $(A\cap B)\cup(B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap D)$, de même que $A\cup(B\cap\overline{C})$, voire A tout seul, ou bien $\overline{A}$ etc. Mettre sous forme polynômiale les expressions sivantes :

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

$A \cap \overline{(\overline{B} \cap C)}$

$(C \cap (\overline{A} \cup B)) \cup \overline{B}$

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = \mathrm{A}$

$A \cap \overline{(\overline{B} \cap C)} = A \cap (B \cup \overline{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{C})$

$(C \cap (\overline{A} \cup B)) \cup \overline{B} = ((C \cap \overline{A}) \cup (C \cap B)) \cup \overline{B} = (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap B) \cup \overline{B}$

4- On imagine dans cet exercice qu'il y a une pluralité de mondes possibles. Par exemple, à un moment t, il y a des mondes possibles où il fait beau, des mondes possibles où il ne fait pas beau, des mondes possibles où on joue de la musique classique, des mondes possibles où on joue du rap, des mondes possibles où on joue du reggae etc. Supposons qu'une assertion déclarative (donc une « proposition ») soit un ensemble de mondes possibles : l'ensemble des mondes possibles où elle est vraie.
Soit ainsi les déclarations suivantes :

P : « on entend dans la rue le bruit d'un marteau-piqueur »
Q : « on entend dans la rue un tramway qui passe »
R : « il se met à pleuvoir »
S : « le facteur apporte le courrier »

Où, donc, P, Q, R, S représentent des ensembles de mondes possibles. Représenter les ensembles de mondes possibles correspondant aux déclarations suivantes :

A : « on entend dans la rue le bruit d'un marteau-piqueur, mais pas celui du tramway, ou il se met à pleuvoir et on entend le tramway qui passe »

B : « de deux choses l'une, ou on entend le marteau-piqueur ou on entend le tramway, mais pas les deux »

C : « il n'arrive jamais que le facteur apporte le courrier et qu'en même temps il se mette à pleuvoir »

D : « il n'arrive jamais qu'il se mette à pleuvoir et qu'on entende le tramway passer sans que le facteur n'apporte le courrier »

$A = (P \cap \overline{Q}) \cup (R \cap Q)$

$B = (P \cup Q) - (P \cap Q)$ ou bien $(P \cap \overline{Q}) \cup (\overline{P} \cap Q)$

$C = \overline{S \cap R}$

$D = \overline{(R \cap Q) \cap \overline{S}}$

5- Représenter par un diagramme d'ensembles la situation suivante : (*d'après Lewis Carroll*)

Les bébés sont illogiques
Nul n'est méprisé quand il peut venir à bout d'un crocodile

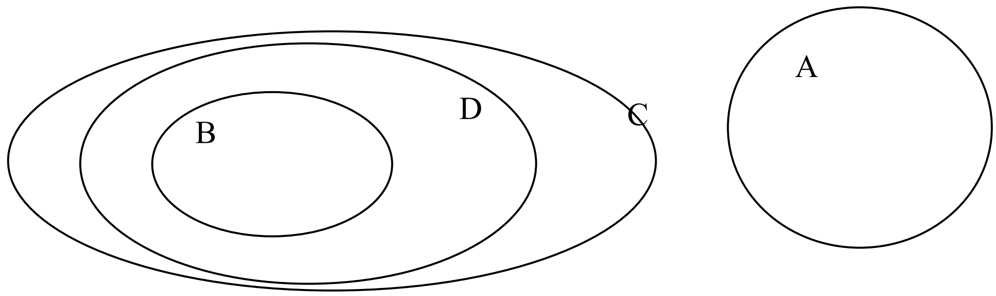
Les gens illogiques sont méprisés

Avec pour « univers » les gens, A = l'ensemble des gens qui peuvent venir à bout d'un crocodile, B = l'ensemble des bébés, C = l'ensemble des gens méprisés, D = l'ensemble des gens illogiques

$B \subset D$

$C \cap A = \phi$ ou $C \subset \overline{A}$

$D \subset C$



Peut-on en déduire que les bébés ne peuvent pas venir à bout d'un crocodile ?

Oui, on en déduit (par transitivité de l'inclusion) : $B \subset \overline{A}$

Même exercice avec :

Aucun fox-terrier ne se promène parmi les signes du zodiaque
Aucun objet qui ne se promène pas parmi les signes du zodiaque n'est une comète
Seuls les fox-terriers ont la queue bouclée

On obtient : (avec F = fox-terrier, Z = se promène parmi les signes du zodiaque, C = comète, Q = queue bouclée)

$F \cap Z = \phi$ *ou* $F \subset \overline{Z}$

$\overline{Z} \cap C = \phi$ *ou* $\overline{Z} \subset \overline{C}$

$F = Q$

Que peut-on en déduire ? $Q \subset \overline{C}$ *ou* $C \subset \overline{Q}$

Autrement dit les comètes n'ont pas la queue bouclée !