Sémantique 3 année 2006-2007
Cours A. Lecomte

Correction du Devoir n°1

1 - Soit L un langage prédicatif du premier ordre contenant :
- constantes individuelles : `John, Bill`
- constantes de prédicat d'arité 1 : `walked, talked, laughed`
- constantes de prédicat d'arité 2 : `saw`

Soit la structure définie par M = (D, Val), où D = {a, b, c} et Val est définie par :
- Val(`John`) = a
- Val(`Bill`) = b
- Val(`walked`) = {a, b}
- Val(`talked`) = {b}
- Val(`laughed`) = {a, c}
- Val(`saw`) = {(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)}

Démontrer que:

1. **M |= `walked(John)`**

Solution:
Val(John) = a et Val(walked) = {a, b} or, Val(John) = $[[\text{John}]]^{M,g}$ (pour n'importe quelle assignation g) et Val(walked) = $[[\text{walked}]]^{M,g}$ donc $[[\text{John}]]^{M,g} \in [[\text{walked}]]^{M,g}$ donc $[[\text{walked(John)}]]^{M,g} = 1$ pour n'importe quelle assignation g, d'où M |= `walked(John).`

2. **M |= `(∃x) (walked(x) ∧ talked(x))`**

Solution :
soit g une assignation arbitraire. Rappelons qu'on appelle x-variante de g toute assignation identique à g sauf éventuellement en x. La question ici est de savoir si quelle que soit g l'assignation de dépatrt, il existe une x-variante de g, g' telle que $[[(\text{walked}(x) \wedge \text{talked}(x))]]^{M,g'} = 1$. Or la réponse est *oui*, puisqu'il suffit de choisir l'assignation g' identique à g sauf en ce que g'(x) = b. En ce cas, on obtient :
$[[(\text{walked}(x))]]^{M,g'} = 1$ puisque $[[x]]^{M,g'} = g'(x) = b \in [[\text{walked}]]^{M,g'} = \{a, b\}$ et
$[[\text{talked}(x))]]^{M,g'} = 1$ puisque $b \in [[\text{talked}]]^{M,g'} = \{b\}$ donc
$[[\text{walked}(x) \wedge \text{talked}(x)]]^{M,g'} = 1$.

3. **M |≠ `(∀x)(∀y) saw(x, y)`**

Solution:
Soit g l'assignation qui à x assigne a et à y assigne b. On a :
$[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g} = 0$ puisque $([[x]]^{M,g}, [[y]]^{M,g}) = (a, b) \notin [[\text{saw}]]^{M,g}$ = val(saw), donc pour une assignation h quelconque $[[(\forall x)(\forall y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,h} = 0$ puisqu'il est faux que pour toute assignation h' identique à h sauf éventuellement en x et en y on ait $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g} = 1$: g ci-dessus en est un contre-exemple.

4. **M |= `(∀x)(∃y) saw(x, y)`**

Solution :
Soit une assignation quelconque g. Il faut passer en revue toutes les x-variantes g' d'une telle g. On a :
- **Soit g' telle que x := a** : alors soit g'' la y-variante de g' qui assigne à y la valeur c, on a : $([[x]]^{M,g''}, [[y]]^{M,g''}) = (a, c) \in [[\text{saw}]]^{M,g''}$ = Val(saw), donc $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g''} = 1$, donc $[[(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,g'} = 1$,

- **Soit g' telle que x := b** : alors soit g'' la y-variante de g' qui assigne à y la valeur c, on a : $([[x]]^{M,g''}, [[y]]^{M,g''}) = (b, c) \in [[saw]]^{M,g''} = Val(saw)$, donc $[[saw(x, y)]]^{M,g''} = 1$, donc $[[(\exists y)\ saw(x, y)]]^{M,g'} = 1$,
- **Soit g' telle que x := c** : alors soit g'' la y-variante de g' qui assigne à y la valeur b, on a : $([[x]]^{M,g''}, [[y]]^{M,g''}) = (c, b) \in [[saw]]^{M,g''} = Val(saw)$, donc $[[saw(x, y)]]^{M,g''} = 1$, donc $[[(\exists y)\ saw(x, y)]]^{M,g'} = 1$,

Donc, pour toute x-variante g' de g on a : $[[(\exists y)\ saw(x, y)]]^{M,g'} = 1$, donc $[[(\forall x)(\exists y)\ saw(x, y)]]^{M,g} = 1$ et le résultat aurait été le même quelle que soit l'aasignation g de départ, d'où $M \models (\forall x)\ (\exists y)\ saw(x, y)$

5. $M \not\models (\exists x)\ (\forall y)\ saw(y, x)$

Solution :

Soit g une assignation quelconque. Cherchons là encore toutes les x-variantes de g.

- **Soit g' telle que x := a**, alors il existe une y-variante g'' de g', celle qui assigne b à y qui est telle que $[[saw(x, y)]]^{M,g''} = 0$, (car $(b, a) \notin Val(saw)$), donc $[[(\forall y)\ saw(y, x)]]^{M,g'} = 0$
- **Soit g' telle que x := b**, alors il existe une y-variante g'' de g', celle qui assigne a à y qui est telle que $[[saw(x, y)]]^{M,g''} = 0$, (car $(a, b) \notin Val(saw)$), donc $[[(\forall y)\ saw(y, x)]]^{M,g'} = 0$
- **Soit g' telle que x := c**, alors il existe une y-variante g'' de g', celle qui assigne c à y qui est telle que $[[saw(x, y)]]^{M,g''} = 0$, (car $(c, c) \notin Val(saw)$), donc $[[(\forall y)\ saw(y, x)]]^{M,g'} = 0$

Donc finalement, $[[(\exists x)(\forall y)\ saw(y, x)]]^{M,g} = 0$ (il n'existe aucune x-variante g' de g telle que $[[(\forall y)\ saw(y, x)]]^{M,g'} = 1$).

2 - Exprimer par des formules de logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. **Exactement un étudiant a ri**

$(\exists x)((etudiant(x) \wedge a\_ri(x)) \wedge (\forall y)(((etudiant(y) \wedge a\_ri(y)) \Rightarrow (y = x)))$

2. **Tous les étudiants ont ri sauf un**

$(\exists y)(etudiant(y) \wedge (\forall x)((etudiant(x) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow a\_ri(x)) \wedge$

$((\forall x)((etudiant(x) \wedge \neg a\_ri(x)) \Rightarrow (x = y))))$

3. **Tous les étudiants ont lu une pièce de théatre**

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(piece(y) \wedge a\_lu(x, y)))$ ou

$(\exists y)(piece(y) \wedge (\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow a\_lu(x, y)))$

4. **Tout étudiant aime sa mère**

On peut utiliser un foncteur mere, de sorte que mere(x) soit un terme. En ce cas :

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow aime(x, mere(x)))$ ou

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow aime(x, mere(y)))$

Sans foncteur :

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(mere(y, x) \wedge aime(x, y)))$ ou

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(mere(y, z) \wedge aime(x, y)))$