Corrigé

NB : les trois exercices suivants sont un peu difficiles. On pourra développer par la suite des méthodes plus commodes pour les résoudre. Il importe juste d'arriver à comprendre les solutions proposées dans le cadre de l'algèbre des Boole (et des ensembles). (On ne fera pas aussi difficile dans les partiels).

Fiche n°2 Les opérations booléennes (suite)

1- Voici le curieux règlement d'un club britannique :

Article 1 : Tout membre non écossais porte des chaussures oranges
Article 2 : Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussures oranges
Article 3 : Les membres mariés ne sortent pas le dimanche
Article 4 : Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais
Article 5 : Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié
Article 6 : Tout membre écossais porte une jupe

On va traduire ces articles sous formes d'équations booléennes (c'est-à-dire d'égalités entre expressions booléennes), par exemple l'article 1 signifie que la classe des membres non écossais qui ne portent pas de chaussures oranges est vide. Si on désigne par E les écossais et par O ceux qui portent des chaussures oranges, cela va se traduire par : $\sim E. \sim O = \mathbf{0}$.
Traduire tous ces articles sous forme d'équations booléennes de ce genre.
A votre avis, ce règlement est-il cohérent ?

Soit :
E : écossais
O : porte des chaussures oranges
J : porte une jupe
M : marié
D : sort le dimanche
On a les représentations suivantes en termes d'algèbre de Boole (où + est la disjonction et . la conjonction, ~ la complémentation, 0 le vide et 1 le plein) :
Art 1 : $\sim E. \sim O = \mathbf{0}$ (il n'y a aucun non écossais qui ne porte pas de chaussures oranges)
(remarquer qu'en prenant le complémentaire des deux côtés, on obtient :
$E + O = \mathbf{1}$, ce qui signifie : tout individu est écossais ou (alors) il porte des chaussures oranges)
Art 2 : $J + \sim O = \mathbf{1}$ (ou bien en passant aux complémentaires : $\sim J.O = \mathbf{0}$)
Art 3 : $M. D = \mathbf{0}$ (ou bien $\sim M + \sim D = \mathbf{1}$)
Art 4 : $D = E$
Art 5 : $J. \sim(E.M) = \mathbf{0}$ (ou bien $\sim J + E.M = \mathbf{1}$)
(remarquer aussi qu'on peut appliquer à ces expressions les lois de de Morgan et les règles de distributivité, de manière à obtenir : $J. (\sim E + \sim M) = \mathbf{0}$, ou encore $J. \sim E + J.\sim M = \mathbf{0}$, d'où nécessairement deux équations : $J. \sim E = \mathbf{0}$ et $J.\sim M = \mathbf{0}$, et $(\sim J + E).(\sim J + M) = \mathbf{1}$, ce qui n'est possible que si $(\sim J + E) = \mathbf{1}$ et $(\sim J + M) = \mathbf{1}$.
Art 6 : $E. \sim J = \mathbf{0}$ (ou bien $\sim E + J = \mathbf{1}$)
Dire que le règlement est respecté c'est dire que tout membre vérifie les six articles, donc la conjonction des 6 équations. Autrement dit que :
(1) $(E + O)(J + \sim O)(\sim M + \sim D) (\sim J + E) (\sim J + M)(\sim E + J) = \mathbf{1}$ avec $D = E$

Ce qui veut bien dire que : **tout individu** est écossais ou porte des chaussures oranges **et** porte une jupe ou ne porte pas de chaussures oranges **et** n'est pas marie ou ne sort pas le dimanche etc.
Mais on peut tout aussi bien dire que ça se ramène à :
~E. ~O + ~ J.O + M. D + J. ~E + J.~M + E. ~J = 0
Ce qui veut dire : **aucun individu** n'est non écossais sans porter de chaussures oranges **ou** porteur de chaussures oranges sans porter de jupe **ou** marié sortant le dimanche ou etc.
Prenons l'équation (1), avec E = D, on obtient :
(E + O)(J + ~O)(~M + ~E) (~J + E) (~J + M)(~E + J) = **1**
Or, (E + O)(~J + E) = E + O. ~J (par distributivité de + par rapport à .)
(J + ~O)(~E + J) = J + ~O.~E
(~M + ~E)(~J + M) = ~M.~J + ~M. M + ~E.~J + ~E. M = ~M.~J + ~E.~J + ~E. M (car ~M. M = **0**).
Or,
(E + O. ~J).(J + ~O.~E). =
E.J + E.~O.~E + O. ~J. J + O. ~J. ~O.~E = E.J puisque dans tous les autres termes il y a un **0**
Donc on obtient :
(1) = (~M.~J + ~E.~J + ~E. M).E.J =
~M.~J.E.J + ~E.~J. E.J + ~E. M. E.J = **0** (puisque tous contiennent un **0**)
Ce qui implique finalement que… **0 = 1** ! ce qui est évidemment impossible. Donc l'ensemble des membres qui vérifient les six articles est nécessairement vide, autrement dit le règlement n'est pas applicable (non cohérent).

2- Même exercice avec cet autre règlement :

Article 1 : les membres de la direction financière sont choisis parmi ceux de la direction générale.
Article 2 : nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque s'il n'est membre de la direction financière.
Article 3 : Aucun membre de la direction de la bibliothèque n'est membre de la direction financière.

On peut résoudre cet exercice au moyen d'ensembles.
Soit : F l'ensemble des membres de la direction financière, G l'ensemble des membres de la direction générale et B l'ensemble des membres de la direction de la bibliothèque.
On a :
Article 1 : $F \subset G$
Article 2 : $(G \cap B) \cap \overline{F} = \phi$
Article 3 : $B \cap F = \phi$
Notons que l'article 2 peut s'écrire aussi : $G \cap B \subset F$
Mais alors si l'intersection de B avec G est incluse dans F et que son intersection avec F est vide, cela entraîne forcément que son intersection avec G doit être vide (supposons qu'il y ait un élément de B dans G, alors il serait dans F par l'article 3, et alors l'intersection de B et de F ne serait pas vide puisqu'elle contiendrait cet élément), d'où :
$B \cap G = \phi$

Et bien évidemment, si cette condition est respectée, en plus de l'article 1, alors les articles 2 et 3 sont respectés. Donc le règlement est équivalent au règlement simplifié suivant :
Article 1' : $F \subset G$
Article 2' : $B \cap G = \phi$

3- Monsieur Dupont, père de famille, doit assister à un match de tennis. Il a promis d'emmener Vincent ou Etienne et il a promis d'autre part à Marie qu'il l'emmènerait avec lui ou qu'il laisserait Vincent à la maison. Si V représente « il emmène Vincent », E « il emmène Etienne », M « il emmène Marie ». Exprimer le contenu de la promesse de Monsieur Dupont comme une expression booléenne.
Monsieur Dupont peut-il emmener avec lui un seul de ses enfants tout en ayant tenu sa promesse ? Et s'il emmène les trois enfants ?

Solution : soit E : il emmène Etienne, V : il emmène Vincent, M : il emmène Marie. On peut représenter le contenu de la promesse par une expression booléenne :
$(E+V)(M+\overline{V})=1$
Le fait qu'il emmène avec lui un seul de ses enfants s'exprime par :
$E.\overline{V}.\overline{M}+\overline{E}.V.\overline{M}+\overline{E}.\overline{V}.M=1$
Il emmène les trois :
EVM = 1
Notons que $(E+V)(M+\overline{V})=EM+VM+E.\overline{V}$
Donc si Mr Dupont emmène les trois enfants, on a EVM = 1, donc en particulier VM = 1 et comme 1 est absorbant pour +, on a $(E+V)(M+\overline{V})=EM+VM+E.\overline{V}=1$ donc il respecte sa promesse. Mais s'il emmène un seul de ses enfants, alors :
Si c'est Etienne, on a $E.\overline{V}.\overline{M}=1$ donc $E.\overline{V}.=1$ et la promesse est tenue.
Si c'est Vincent, on a : $\overline{E}.V.\overline{M}=1$, qui ne réalise aucun des termes de la somme $EM+VM+E.\overline{V}$, donc la promesse n'est pas tenue.
Si c'est Marie, on a : $\overline{E}.\overline{V}.M=1$ qui ne réalise pas davantage l'un des termes de la somme, donc la promesse n'est pas tenue.