

Sémantique formelle

Cours de Licence de Sciences du Langage (L3)

Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

Exercices- 4 - Evaluation d'une formule

Soit L un langage prédictatif contenant :

- des constantes : p, a, b, l
- des variables : x_1, x_2, x_3
- des symboles de prédicats :
K, d'arité 2, G, d'arité 2, C, d'arité 1, H d'arité 1, F d'arité 1

Soit $M = \langle D, I \rangle$ où D est un ensemble d'individus non vide (domaine d'interprétation) et I une fonction d'interprétation. On a :

$D = \{\text{Pavarotti, Alagna, Bartoli, Lott}\}$

et I est définie de la manière suivante :

$I(p) = \text{Pavarotti}$

$I(a) = \text{Alagna}$

$I(b) = \text{Bartoli}$

$I(l) = \text{Lott}$

$I(H) = \{\text{Pavarotti, Alagna}\}$

$I(F) = \{\text{Bartoli, Lott}\}$

$I(C) = \{\text{Pavarotti, Alagna, Bartoli}\}$

$I(K) = \{(\text{Pavarotti, Pavarotti}), (\text{Pavarotti, Alagna}), (\text{Alagna, Bartoli}), (\text{Bartoli, Lott}), (\text{Lott, Pavarotti})\}$

$I(G) = \{(\text{Bartoli, Bartoli}), (\text{Bartoli, Alagna}), (\text{Alagna, Alagna})\}$

Soit g_1 une fonction d'assignation (qui assigne à toute variable une valeur prise dans D).

$g_1 :$

- $x_1 \rightarrow \text{Pavarotti}$
- $x_2 \rightarrow \text{Alagna}$
- $x_3 \rightarrow \text{Lott}$

Evaluer, par rapport à M et à g_1 les formules :

- $H(a) \wedge C(x_1)$

$[[H(a) \wedge C(x_1)]]^{M, g_1} = 1$ ssi $[[H(a)]]^{M, g_1} = [[C(x_1)]]^{M, g_1} = 1$ et $[[H(a)]]^{M, g_1} = 1$ ssi $I(a) \in I(H)$ (puisque a est une constante) et $[[C(x_1)]]^{M, g_1} = 1$ ssi $g_1(x_1) \in I(C)$ (puisque x_1 est une variable), or $I(a) = \text{Alagna}$ et on a bien $\text{Alagna} \in I(H)$ donc $[[H(a)]]^{M, g_1} = 1$ et $g_1(x_1) = \text{Pavarotti}$ et $\text{Pavarotti} \in I(C)$ donc $[[C(x_1)]]^{M, g_1} = 1$.

- $\neg H(x_1) \Leftrightarrow K(x_2, b)$

$[[\neg H(x_1) \Leftrightarrow K(x_2, b)]]^{M, g_1} = 1$ ssi $[[\neg H(x_1)]]^{M, g_1} = [[K(x_2, b)]]^{M, g_1}$.

$g_1(x_1) = \text{Pavarotti}$, $\text{Pavarotti} \in I(H)$ donc $[[H(x_1)]]^{M, g_1} = 1$, donc $[[\neg H(x_1)]]^{M, g_1} = 0$.

D'autre part :

$g_1(x_2) = \text{Alagna}$ et $I(b) = \text{Bartoli}$ et $(\text{Alagna}, \text{Bartoli}) \in I(K)$, donc $[[K(x_2, b)]]^{M, g_1} = 1$
donc les deux n'ont pas même valeur de vérité, donc $[[\neg H(x_1) \Leftrightarrow K(x_2, b)]]^{M, g_1} = 0$.

- $(\exists x_2)K(x_1, x_2)$

$[[(\exists x_2)K(x_1, x_2)]]^{M, g_1} = 1$ ssi il existe une g_2 identique à g_1 sauf éventuellement en x_2 telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_2} = 1$. par hypothèse, $g_2(x_1) = g_1(x_1) = \text{Pavarotti}$. Il suffit donc de trouver une valeur v à donner à x_2 de telle sorte que $(\text{Pavarotti}, v) \in I(K)$, or on peut par exemple prendre $v = \text{Alagna}$. Soit donc g_2 l'assignation : $x_1 \rightarrow \text{Pavarotti}$ et $x_2 \rightarrow \text{Alagna}$ (en fait, c'est g_1 !) on a : $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_2} = 1$.

- $(\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)$

$[[(\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)]]^{M, g_1} = 1$ ssi *toute* assignation g_2 différant de g_1 seulement éventuellement en x_1 est telle *qu'il existe une* assignation g_3 différant de g_2 seulement éventuellement en x_2 telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_3} = 1$.

Considérons donc toutes les valeurs v_1 qu'il est possible de donner à x_1 et regardons si chaque fois on peut trouver une valeur v_2 pour x_2 telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_3} = 1$ où g_3 est l'assignation $x_1 \rightarrow v_1, x_2 \rightarrow v_2$

si $v_1 = \text{Pavarotti}$:

si $v_2 = \text{Alagna}$, alors l'assignation g_1 telle que $g_1 : x_1 \rightarrow \text{Pavarotti}$ et $x_2 \rightarrow \text{Alagna}$ est telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_1} = 1$, il suffit donc de prendre $g_3 = g_1$.

si $v_1 = \text{Alagna}$,

si $v_2 = \text{Bartoli}$, alors l'assignation g_3 telle que $g_3 : x_1 \rightarrow \text{Alagna}$ et $x_2 \rightarrow \text{Bartoli}$ est telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_3} = 1$.

si $v_1 = \text{Bartoli}$,

si $v_2 = \text{Lott}$, alors l'assignation g_3 telle que $g_3 : x_1 \rightarrow \text{Bartoli}$ et $x_2 \rightarrow \text{Lott}$ est telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_3} = 1$.

si $v_1 = \text{Lott}$

si $v_2 = \text{Pavarotti}$, alors l'assignation g_3 telle que $g_3 : x_1 \rightarrow \text{Lott}$ et $x_2 \rightarrow \text{Pavarotti}$ est telle que $[[K(x_1, x_2)]]^{M, g_3} = 1$.

Donc $[[(\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)]]^{M, g_1} = 1$, mais l'assignation g_1 ne joue aucun rôle. Etant donné que les valeurs de x_1 et de x_2 sont destinées à être changées, on aurait pu partir de n'importe quelle assignation g , le résultat aurait été le même ! donc la valeur de vérité de la formule ne dépend pas d'une fonction d'assignation, ce qui est normal puisque la formule ne contient pas de variable libre. On peut donc simplement écrire : $[[(\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)]]^M = 1$, ou :

$M \models (\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)$ (**la formule $(\forall x_1)(\exists x_2)K(x_1, x_2)$ est vraie dans M**).

- $(\forall x_1)(G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2)))$

$[[(\forall x_1)(G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2)))]]^{M, g_1} = 1$ ssi pour toute valeur v_1 assignée à x_1 par une fonction d'assignation g_2 identique à g_1 sur l'autre variable (x_2), on a :

$$[[G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]]^{M, g_2} = 1$$

Passons donc encore en revue les valeurs possibles de x_1

si $v_1 = \text{Pavarotti}$,

$[[G(x_1, x_1)]]^{M,g} = 0$ pour toute g telle que $x_1 \rightarrow \text{Pavarotti}$, puisque $(\text{Pavarotti}, \text{Pavarotti}) \notin I(G)$, donc d'après la table de vérité de l'implication,
 $[[G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]]^{M,g} = 1$ pour toute g telle que $x_1 \rightarrow \text{Pavarotti}$.

si $v_1 = \text{Alagna}$,

$[[G(x_1, x_1)]]^{M,g} = 1$ pour toute g telle que $x_1 \rightarrow \text{Alagna}$, puisque $(\text{Alagna}, \text{Alagna}) \in I(G)$, donc d'après la table de vérité de l'implication, pour que
 $[[G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]]^{M,g} = 1$ il faut que $[(\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]^{M,g} = 1$, donc il faut trouver une g_2 assignant la valeur Alagna à x_1 et une valeur v_2 à x_2 telle que :
 $[(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]^{M,g_2} = 1$, or si on prend $v_2 = \text{Bartoli}$, on a bien : $(\text{Alagna}, \text{Bartoli}) \in I(K)$ et $\text{Bartoli} \in I(F)$, donc il suffit de prendre $g_2 : x_1 \rightarrow \text{Alagna}, x_2 \rightarrow \text{Bartoli}$.

si $v_1 = \text{Bartoli}$,

$[[G(x_1, x_1)]]^{M,g} = 1$ pour toute g telle que $x_1 \rightarrow \text{Bartoli}$, puisque $(\text{Bartoli}, \text{Bartoli}) \in I(G)$, donc, comme précédemment, il faut trouver une g_2 assignant la valeur Bartoli à x_1 et une valeur v_2 à x_2 telle que :

$[(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]^{M,g_2} = 1$, or si on prend $v_2 = \text{Lott}$, on a bien : $(\text{Bartoli}, \text{Lott}) \in I(K)$ et $\text{Lott} \in I(F)$, donc il suffit de prendre $g_2 : x_1 \rightarrow \text{Bartoli}, x_2 \rightarrow \text{Lott}$.

si $v_1 = \text{Lott}$

comme dans le premier cas, $(\text{Lott}, \text{Lott}) \notin I(G)$, donc d'après la table de vérité de l'implication, $[[G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2))]]^{M,g} = 1$ pour toute g telle que $x_1 \rightarrow \text{Lott}$.

Finalement, on a bien :

$$[[(\forall x_1)(G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2)))]]^{M,g_1} = 1$$

Là encore, ça ne dépend pas de la fonction d'assignation g_1 , donc on peut écrire:

$$[[(\forall x_1)(G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2)))]]^M = 1, \text{ ou:}$$

$$M \models (\forall x_1)(G(x_1, x_1) \Rightarrow (\exists x_2)(K(x_1, x_2) \wedge F(x_2)))$$