Cours de logique – 5

Relation de conséquence logique

Définition : soit $A_1, \ldots, A_n$ et B des propositions complexes, construites à partir de propositions élémentaires $p_1, \ldots, p_m$, on dit que B est une conséquence logique de $A_1, \ldots, A_n$ ou que $A_1, \ldots, A_n$ permettent de déduire B, et on écrit : $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ si et seulement si dans toute situation attribuant des valeurs de vérité à $p_1, \ldots, p_m$ où $A_1, \ldots, A_n$ sont vraies, B l'est aussi.

Exemple : il est facile de montrer que :

$$\{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)), (a \wedge b)\} \models c$$

On peut faire une table de vérité pour cela :

a	b	c	$b \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$	$a \wedge b$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

où on voit évidemment qu'à toutes les lignes (en l'occurrence une seule !) où les deux formules $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$ et $(a \wedge b)$ sont vraies, c l'est aussi.

Dans la relation « $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ », $A_1, \ldots, A_n$ sont appelées les prémisses et B la conclusion. On doit faire attention au fait que le symbole « $\models$ » qui a été introduit **n'est pas** un connecteur du calcul propositionnel, c'est juste un symbole indiquant qu'il existe une relation particulière entre $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et B. C'est un méta-symbole, ou symbole du méta-langage par rapport aux symboles des connecteurs usuels ($\Rightarrow, \wedge, \neg, \vee, \Leftrightarrow, \perp$, T), ces derniers faisant partie du langage-objet. D'une manière générale, *le langage-objet d'une théorie est le langage dans lequel elle s'écrit, alors que le métalangage est le langage dans lequel on exprime ses propriétés*. La différence entre langage-objet et métalangage est fondamentale dans les sciences, y compris en linguistique. Par exemple, lorsqu'on étudie une langue, celle-ci figure comme langage-objet, mais les termes qu'on emploie pour décrire les propriétés de cette langue appartiennent à un métalangage.

Nous avons déjà introduit un méta-symbole, il s'agissait de « $\equiv$ ».

On peut exprimer des relations intéressantes entre expressions du langage et expressions du méta-langage. Par exemple :

Théorème 1 : si « $A \Leftrightarrow B$ » est une tautologie, alors on a : $A \equiv B$ (et réciproquement).

Démonstration : dire que « $A \Leftrightarrow B$ » est une tautologie, c'est dire que, dans toutes les situations possibles, A et B ont la même valeur de vérité, c'est donc dire que A et B ont la même table de vérité, autrement dit que $A \equiv B$.

Par exemple, on a pu démontrer en exercices que :

$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow c)$ est une tautologie. On en déduit :

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \equiv ((a \wedge b) \Rightarrow c)$$

Théorème 2 : si « $A \Rightarrow B$ » est une tautologie, alors $\{A\} \models B$ (et réciproquement).

Démonstration : dire que « $A \Rightarrow B$ » est une tautologie, c'est dire qu'il n'est jamais le cas que A soit vrai et B faux, donc dans toute situation où A est vrai, B l'est aussi, ce qui s'exprime justement par la relation $\{A\} \models B$.

Théorème 3 : $\{A_1, \ldots, A_n\} \models (A \Rightarrow B)$ si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, A\} \models B$.

Démonstration : 1) si dans toutes les situations où $A_1, \ldots, A_n$ sont vraies, $A \Rightarrow B$ l'est également, alors, dans toutes ces situations, si de plus A est vraie, B l'est aussi, donc dans toutes les situations où $A_1, \ldots, A_n$, A sont vraies, B l'est. 2) Réciproquement si, dans toutes les situations où $A_1, \ldots, A_n$, A sont vraies, B l'est aussi, alors dans toutes les situations où $A_1, \ldots, A_n$ sont vraies, $A \Rightarrow B$ l'est aussi.

Ainsi, faire la preuve que « $A \Rightarrow B$ » est vrai à partir de prémisses données revient à introduire A dans l'ensemble de ces prémisses et à prouver ensuite que B est vrai. On dit en ce cas que l'on pose A comme hypothèse.

Règles d'inférence

Définition : une règle d'inférence est une relation de conséquence logique particulière.

Les plus « célèbres »[i] sont :

a. Modus ponens : $\{A, A \Rightarrow B\} \models B$
b. Modus tollens : $\{A \Rightarrow B, \neg B\} \models \neg A$
c. Syllogisme : $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$
d. Réduction à l'absurde : $\{A \Rightarrow \perp\} \models \neg A$
e. Règle de Clavius[ii] : $\{A \Rightarrow \neg A\} \models \neg A$
f. Règle de Duns Scot[iii] : $\{A\} \models (\neg A \Rightarrow B)$
g. Double négation : $\{\neg\neg A\} \models A$

On peut avoir aussi des règles d'inférence sans prémisses ! c'est-à-dire… des tautologies particulières, comme :

h. Tiers exclu : $\models (A \vee \neg A)$
i. Non contradiction : $\models \neg (A \wedge \neg A)$

Noter que la règle (f) signifie que si une proposition A est vraie, alors on peut déduire n'importe quoi de sa négation (B est totalement arbitraire). Elle est en fait équivalente à : $\{(A \wedge \neg A)\} \models B$, ou à $\perp \models B$, ce qui signifie qu'à partir du faux, on peut déduire n'importe quoi, ce que les médiévaux exprimaient par la formule latine *ad impossibilie sequitur quodlibet* (de l'impossibilité il suit n'importe quoi).

Exercice : montrer qu'on a aussi les règles suivantes :

j. $\{(A \Rightarrow B), (C \Rightarrow B), (A \vee C)\} \models B$
k. $\{A\} \models A \vee B$
l. $\{(A \wedge B)\} \models A$
m. $\{(A \Rightarrow B)\} \models (\neg B \Rightarrow \neg A)$
n. $\{(A \vee B), \neg B\} \models A$
o. $\{(A \text{ w } B), B\} \models \neg A$ (où « w » désigne le « ou » exclusif)
p. $\{(A \Rightarrow B)\} \models ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$

Dans les *Réfutations sophistiques*, Aristote met en garde contre de fausses règles d'inférence, ce que l'on appelle des sophismes. Ainsi, un sophisme célèbre (et souvent pratiqué dans le discours courant) est le sophisme dit « de l'affirmation du conséquent ». Il consiste à croire que $\{A \Rightarrow B, B\} \models A$. Ce qui est évidemment **faux** (par exemple, à supposer que toutes les Irlandaises soient rousses, si je vois une fille rousse, je ne peux pas déduire que c'est une Irlandaise !).

A partir de cette notion de règle d'inférence, on peut concevoir en général ce qu'est un raisonnement.

Définition : étant données des prémisses, $A_1, \ldots, A_n$, un raisonnement conduisant à une conclusion B est une suite de propositions $C_1, \ldots, C_m$ telle que $C_m = B$ et que toutes les autres soient : ou bien des prémisses ou bien des conclusions de l'application de règles d'inférence aux propositions précédentes.

Exemple : un raisonnement peut conduire des prémisses $p \Rightarrow (q \text{ w } r)$ et $(p \wedge q)$ à la conclusion : $\neg r$. Il suffit de prendre la suite de propositions :

$C_1 : p \Rightarrow (q \text{ w } r)$	(prémisse)
$C_2 : (p \wedge q)$	(prémisse)
$C_3 : p$	(règle $\{A \wedge B\} \models A$ appliquée à C_2)
$C_4 : (q \text{ w } r)$	(modus ponens appliqué à C_1, C_3)

C_5 : q (règle $\{A \wedge B\} \models B$ appliquée à C_2)

C_6 : $\neg r$ (règle {A w B, A} $\models \neg$ B appliquée à C_4, C_5)

Ce raisonnement s'appliquerait par exemple au texte suivant :

Si l'inflation augmente soit la croissance augmente, soit la monnaie s'écroule. L'inflation augmente et la croissance aussi. Donc la monnaie ne s'écroule pas.

Compatibilité et incohérence

Définition : un ensemble de propositions $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est dit formé de propositions compatibles (ou est dit cohérent) s'il existe au moins une situation possible en termes de valeurs de vérité associées aux propositions élémentaires qui les composent telle que toutes soient vraies.

Un tel ensemble est dit incohérent dans le cas contraire.

Théorème 4 : $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est incohérent si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n\} \models \bot$.

Démonstration : noter que dire que $\{A_1, \ldots, A_n\} \models \bot$ signifie que dans toute situation où $A_1, \ldots, A_n$ sont vraies, $\bot$ est aussi vrai ! mais, par définition, $\bot$ n'est jamais vrai ! donc dire que $\{A_1, \ldots, A_n\} \models \bot$ signifie qu'il n'existe *aucune* situation où toutes les formules, $A_1, \ldots, A_n$ sont vraies.

Théorème 5 : si $\{A_1, \ldots, A_n\} \models \bot$, alors $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models \neg A_n$

Démonstration : nous savons qu'en ce cas, $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models (A_n \Rightarrow \bot)$, et que $(A \Rightarrow \bot) \equiv \neg A$.

---

[i] La plupart de ces lois figurent dans le traité de Guillaume d'Occam (« la Summa logicae »), moine philosophe du XIIIème siècle

[ii] Clavius est le nom d'un astronome du XVIème siècle (le nom de la loi lui a été évidemment donné a posteriori !)

[iii] Duns Scot est le nom d'un philosophe important de la fin du XIIIème siècle.