Cours-logique 3

Le calcul booléen – 2 (ainsi appelé parce qu'inventé par George Boole)

Dire que les classes d'objets constituent une algèbre de Boole signifie qu'elles sont composables au moyen de deux opérations (dites « binaires » parce qu'elles agissent sur deux choses pour en produire une troisième) : « $\cup$ » et « $\cap$ », qu'elles peuvent être soumises à une opération « unaire », notée $\overline{(\ )}$, et qu'elles admettent deux classes particulières : $\varnothing$ (classe vide) et U (univers), de telle sorte que :

- $\cup$ et $\cap$ sont toutes les deux **idempotentes**, **commutatives** et **associatives** :
  - a $\cup$ a = a et a $\cap$ a = a (idempotence)
  - a $\cup$ b = b $\cup$ a et a $\cap$ b = b $\cap$ a (commutativité)
  - a $\cup$ (b $\cup$ c) = (a $\cup$ b) $\cup$ c et a $\cap$ (b $\cap$ c) = (a $\cap$ b) $\cap$ c (associativité)
- $\cap$ est **distributive par rapport** à $\cup$:
  - a $\cap$ (b $\cup$ c) = (a $\cap$ b) $\cup$ (a $\cap$ c)
- elles ont toutes deux **un élément neutre** :
  - a $\cup$ $\varnothing$ = a quelle que soit a ($\varnothing$ élément neutre pour $\cup$)
  - a $\cap$ U = a que soit a (U élément neutre pour $\cap$)
- elles ont toutes deux **un élément absorbant** :
  - a $\cup$ U = U quelle que soit a (U élément absorbant pour $\cup$)
  - a $\cap$ $\varnothing$ = $\varnothing$ que soit a ($\varnothing$ élément absorbant pour $\cap$)
- $\bar{a}$ est **complémentaire** de a au sens suivant :
  - a $\cup$ $\bar{a}$ = U quelle que soit a
  - a $\cap$ $\bar{a}$ = $\varnothing$ quelle que soit a

A partir de ces propositions prises comme axiomes, on peut déduire un grand nombre de propriétés, qui apparaissent alors comme des théorèmes.

Ainsi, on peut montrer que :

- a $\cup$ (a $\cap$ b) = a
  - dem : a $\cup$ (a $\cap$ b) = (a $\cap$ U) $\cup$ (a $\cap$ b) (U élément neutre pour $\cap$) = a $\cap$ (U $\cup$ b) (distributivité) = a $\cap$ U (U élément absorbant pour $\cup$) = a (U élément neutre pour $\cap$)
- a $\cap$ (a $\cup$ b) = a
  - dem : a $\cap$ (a $\cup$ b) = (a $\cap$ a) $\cup$ (a $\cap$ b) = a $\cup$ (a $\cap$ b) = a
- pour chaque a, le complémentaire de a, $\bar{a}$, est unique.
- Ce qui permet de calculer :
- Règles de De Morgan :
  - $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$
  - $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$

On peut aussi montrer :

- a $\cup$ (b $\cap$ c) = (a $\cup$ b) $\cap$ (a $\cup$ c)

(distributivité de l'union par rapport à l'intersection)

-

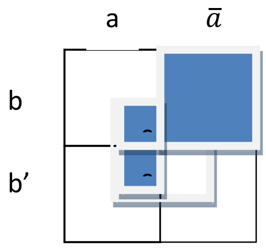
De telles relations se visualisent facilement au moyen de diagrammes. Cf. feuilles jointes.

Exercices : simplification d'expression booléenne.

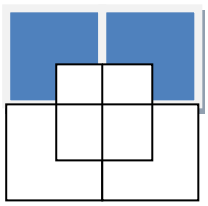
Soit la classe donnée par l'expression suivante : $((a \cup b) \cap (c \cup \bar{a})) \cup (b \cap (\bar{c} \cup \bar{b}))$. Elle peut être aussi bien donnée au moyen d'une expression plus simple (comportant le moins possible de lettres).

On utilise les diagrammes de Lewis Carroll (cf. feuilles jointes).

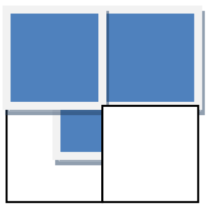
1) $((a \cup b) \cap (c \cup \bar{a}))$:



2) $b \cap (\bar{c} \cup \bar{b})$:



3) L'union des deux donne :



On voit que cette forme contient b dans son ensemble, mais aussi un petit carré en plus, qui correspond à $a \cap \bar{b} \cap c$, donc on pourrait l'écrire : $b \cup (a \cap \bar{b} \cap c)$, mais ce petit carré appartient à un rectangle plus grand, qui représente $a \cap c$, lequel est aussi complètement contenu dans la forme. On peut donc aussi l'écrire $b \cup (a \cap c)$, ce qui est la forme la plus simple.