Sémantique

Cours de Licence de Sciences du Langage (L2)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

Cours n° 2 – Théorie de l'inférence (suite), la logique et l'argumentation

1.5 Rappels de logique propositionnelle

1.5.1 Connecteurs usuels

La logique propositionnelle classique bivalente repose sur la notion de ***proposition***, vue comme entité qui peut prendre pour valeurs seulement Vrai ou Faux (ou 1 et 0). Une proposition composée s'obtient à partir de propositions atomiques par combinaison au moyen de *connecteurs*. Un *connecteur unaire* est un opérateur qui, appliqué à une proposition, donne une proposition. Un *connecteur binaire* est un opérateur qui, appliqué à deux propositions, donne une proposition. La signification d'un connecteur est une certaine fonction qui lui est associée (*fonction de vérité*) et qui détermine la valeur de vérité de la proposition obtenue au moyen de ce connecteur, en fonction des valeurs de vérité des propositions composantes.

Exemple: définition de "$\wedge$": (*conjonction*)

p	q	$p\wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En résumé : $V \wedge V = V$; $V \wedge F = F$; $F \wedge V = F$; $F \wedge F = F$.

disjonction :
Sera donnée par:

$$V \vee V = V \quad V \vee F = V \quad F \vee V = V \quad F \vee F = F$$

d'où la table de vérité:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque : ce « ou » est dit ***inclusif*** car on admet que p et q soient vraies en même temps. C'est le « ou » que nous trouvons dans une phrase comme :

(1) Il faut prévoir qu'il neige ou qu'il y ait du verglas

S'il y a les deux (*neige **et** verglas*) nous ne prétendrons pas que la phrase (1) ne s'applique pas à la situation visée.
En revanche, on peut très bien imaginer un connecteur de *disjonction* ***exclusive*** (W), dont la table de vérité serait alors :

p	q	p W q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dans la langue, ce connecteur se traduit aussi par « à moins que » ou « sauf si ». Exemples :

(2) *Nous partirons en montagne* ***à moins qu****'il n'y ait une tempête de neige*

(3) *Nous partirons en montagne* ***sauf s****'il y a une tempête de neige*

La condition de vérité de (2) aussi bien que de (3) est que, ***ou bien*** nous partirons en montagne, ***ou bien*** il y a une tempête de neige (mais pas les deux !).

négation:

Sera donnée par:

$\neg$ V = F et $\neg$ F = V

implication :

Sera donnée par:

V $\Rightarrow$ V = V, V $\Rightarrow$ F = F, F $\Rightarrow$ V = V, F $\Rightarrow$ F = V

d'où la table:

p	q	p $\Rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si nous introduisons le symbole: " $\equiv$" pour signifier : "a même valeur de vérité dans tous les cas", alors on remarque que :

$$\boxed{p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg (p \wedge \neg q)}$$

ce qui signifie que le sens qui est donné aux mots *si… alors…* (au connecteur d'implication) est simplement celui selon lequel **il est vrai que** *si P alors Q* dans le cas, *et seulement* dans le cas où *il n'est pas possible d'avoir P sans avoir Q*. La formule du milieu, quant à elle, signifie que dire que *p implique q* est équivalent à dire que l'on a q *ou (alors)* on n'a pas p. Cela apparaît souvent dans le langage courant, où on admet que les expressions suivantes ont la même signification :

(4) S'il y a une neige fraîche, alors il y a du plaisir à faire de ski

(5) Il n'y a pas de neige fraîche sans plaisir de faire du ski

(6) Il y a du plaisir à faire du ski, ou alors (c'est que) il n'y a pas de neige fraîche

La définition de l'implication peut sembler étrange, d'abord parce que dans le langage courant, le verbe "impliquer" est utilisé dans un sens transitif et porte la marque d'une action de quelquechose sur quelquechose, alors qu'ici, l'implication n'est qu'un connecteur comme un autre ($\vee$ ou $\wedge$) (« p implique q » exprime seulement la relation entre p et q qui consiste en ce qu'on ne peut pas avoir p sans avoir q), ensuite à cause des deux dernières lignes de la table de vérité, qui se traduisent par : "F $\Rightarrow$ V = V" et "F $\Rightarrow$ F = V". Autrement dit il est « vrai » que « le faux implique le vrai » et il est « vrai » que « le faux implique le faux ».

Ainsi lorsqu'une proposition est fausse, toute implication qui la possède pour antécédent est vraie!
Notons que si nous réfléchissons un peu, nous constatons que l'étrangeté de l'implication n'est pas limitée à ce cas où p est faux. Car dans les deux autres cas, on peut avoir des choses tout aussi surprenantes. Ainsi une implication entre deux propositions vraies est vrai, *quelles que soient ces propositions*, c'est-à-dire *indépendamment du contenu* qu'elles peuvent véhiculer. Des auteurs ont pu ainsi s'étonner que: "l'eau bout à 100° (sous telle et telle condition etc.)" *implique* "Mars est la planète la plus proche de la Terre" alors que bien sûr, il n'y a aucun lien de contenu entre ces deux propositions. Mais encore une fois, $P \Rightarrow Q$ ne veut rien dire d'autre que le fait qu'il est impossible d'avoir P sans avoir Q. Par exemple, on a *fumée* $\Rightarrow$ *feu* parce qu'il est bien connu que « il n'y a pas de fumée sans feu », mais a priori on n'est pas forcé de connaître la relation intrinsèque qui existe entre le feu et la fumée (que l'un cause l'autre par exemple). La notion d'implication ne doit pas être confondue avec celle de cause.
On peut se convaincre que les deux dernières lignes de la table de vérité du *si… alors…* sont « correctes » en prenant les exemples suivants :

(7) Si Paris est en Italie, alors les jonquilles fleurissent au printemps

(8) Si Paris est en Italie, alors Chirac est le roi des Belges

(7) ne pourrait être faux que si on avait :

(9) Paris est en Italie et les jonquilles ne fleurissent pas au printemps

or, (9) est faux, parce que Paris n'est pas en Italie (et accessoirement parce que les jonquilles fleurissent au printemps).
De même (8) ne pourrait être faux que si on avait :

(10) Paris est en Italie et Chirac n'est pas le roi des Belges

Or, là aussi, (10) est faux, parce que Paris n'est pas en Italie.
Le langage ordinaire exploite d'ailleurs ce genre de propriété : quand nous voulons exprimer qu'une phrase est certainement fausse, au lieu de dire simplement qu'elle est fausse, il arrive qu'on lui fasse entraîner une absurdité. Par exemple :

(11) Si toi, tu deviens ministre, alors moi, je veux bien me faire moine !

(11) a un sens bien précis : elle exprime le fait qu'on est sûr que notre interlocuteur n'a aucune chance de devenir ministre, étant entendu qu'il est très peu vraisemblable que nous souhaitions nous faire moine. Cette condition est en effet une condition de vérité de la phrase (8) (correspondant à la ligne (F, F)).

Exercice : *voici un test fameux, souvent commenté dans la littérature psychologique (test de Wason). On dispose sur une table quatre cartes. Chaque carte possède sur une face une lettre et sur l'autre un chiffre. On ne voit de chaque carte bien sûr que la face retournée. Supposons que nous ayons :* ***E, P, 4,*** *7. On veut savoir, en retournant le moins de cartes possibles (deux, en fait) s'il est vrai que dans la situation présente « au dos de chaque voyelle figure un chiffre pair ». Quelles sont les cartes qu'il faut retourner ?*

> (**solution** : on résout cet exercice en pensant qu'on doit dire si « *voyelle* $\Rightarrow$ *chiffre pair* » est vrai ou faux. Or, cette implication est fausse si et seulement si on a « *voyelle et chiffre impair* ». Donc afin de savoir si nous sommes dans cette situation, il suffit de regarder ce qu'il y a au dos de la voyelle et au dos du chiffre impair. La réponse est donc : **E, 7**.
> Si nous retournions une autre carte, l'information obtenue ne nous aiderait pas : si nous retournons le P par exemple, qu'il y ait au dos un chiffre pair ou un chiffre impair ne nous importe pas (cela nous intéresserait cependant si la consigne avait été différente et si elle avait consisté à tester « au dos de chaque chiffre pair figure une voyelle », mais ce n'est pas ce qui nous est demandé). Si nous retournons le chiffre pair, 4, alors de la

même manière le fait qu'il y ait une voyelle ou une consonne ne nous importe pas (on n'a jamais dit qu'au dos d'un chiffre pair devait figurer une voyelle par exemple, ni qu'au dos d'une consonne devait nécessairement figurer un chiffre impair). En revanche si nous retournons le E et qu'au dos nous trouvons un chiffre impair, alors la phrase est infirmée, et si nous retournons le 7 et qu'au dos nous trouvons une voyelle, alors il en est de même.)

équivalence :
Sera donnée par:

$V \Leftrightarrow V = V; \quad V \Leftrightarrow F = F; \quad F \Leftrightarrow V = F; \quad F \Leftrightarrow F = V$

On vérifiera que:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Remarques terminologiques :
Dans "$A \Rightarrow B$", on appelle A: condition **suffisante**, en général exprimée en français par la conjonction de subordination **si**, on appelle B: condition **nécessaire**, en général exprimée en français par: **seulement si**, ou: **que si**.
<u>Exemple:</u>

(12) *ma voiture tombe en panne **s**'il pleut*: pluie $\Rightarrow$ panne

(13) *ma voiture ne tombe en panne **que s**'il pleut*: panne $\Rightarrow$ pluie

Une condition A à la fois suffisante (**si**) et nécessaire (**seulement si**) de B est donc une condition **nécessaire et suffisante** de B. Cela s'exprime par: A **si et seulement si** B, qui se note $A \Leftrightarrow B$.

1.5.2 La notion de loi en logique propositionnelle

1.5.2.1 Tautologies et contradictions

Un cas particulier de fonction de vérité est donné par *une fonction constante*. C'est soit le cas où, à toute situation de vérité est associé V, soit le cas où, à toute telle situation est associé F. Wittgenstein a appelé ***tautologie*** une proposition qui tombe sous le premier cas et ***contradiction*** une proposition qui tombe sous le second. Une tautologie est donc une proposition ϕ telle que pour toute ligne λ de sa table de vérité on ait: ϕ prend la valeur V.
Nous écrirons:

$\models A$ pour dire que "A est une tautologie".

Les tautologies sont importantes car elles nous donnent toutes les "lois d'inférence" couramment utilisées en logique et en mathématique.

Théorème 1: on a les tautologies suivantes:

$\models p \Rightarrow p$ (**loi d'identité pour l'implication**)

$\models p \Leftrightarrow p$ (**loi d'identité pour l'équivalence**)

$\models p \vee \neg p$ (**loi du tiers exclu**)

$\models \neg (p \wedge \neg p)$ (**loi de non-contradiction**)

$\models \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\models \neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$(**lois de De Morgan**)

Noter que les lois de De Morgan peuvent aussi bien s'écrire:

$\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

$\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

D'une façon générale, on montrera que:

Théorème 2: $\models$ *(A $\Leftrightarrow$ B) si et seulement si A $\equiv$ B. (où A et B sont n'importe quelles propositions construites à partir de propositions élémentaires).*

Etant donné une tautologie, on peut en construire une infinité à partir d'elle. Pour cela il suffit de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3: *Soit une proposition composée de variables propositionnelles: a_1, a_2, ... a_n, de connecteurs et de parenthèses. Nous la noterons: $A(a_1, a_2, ..., a_n)$.*
Si $A(a_1, a_2, ... a_n)$ est une tautologie, alors en substituant dans $A(a_1, a_2,... a_n)$ des propositions quelconques A_1, A_2, ... A_n aux symboles a_1, a_2...a_n, on obtient encore une tautologie.

Exemple: $((a \wedge b) \Rightarrow c) \vee \neg ((a \wedge b) \Rightarrow c)$ est une tautologie.

1.5.2.2 Règles d'inférence

Définition: Soit A_1, A_2, ..., A_n des propositions composées de variables propositionnelles, de connecteurs et de parenthèses. Une proposition B sera dite **être une conséquence logique** de A_1, A_2, ... A_n et nous écrirons:

$$\{A_1 , ... , A_n\} \models B$$

si et seulement si: pour toute assignation de valeurs de vérité aux variables propositionnelles apparaissant dans A_1, A_2, ...A_n et B, chaque fois que A_1, A_2, ...A_n sont vraies, alors B est aussi vraie.

Attention: voici un nouvel usage du signe "|=". Cette fois, il établit un lien entre un ensemble de propositions et une proposition. Nous allons plus loin établir le rapport entre cet usage et l'usage de "|=" qui est fait pour indiquer la présence d'une tautologie (cf théorème 4). Noter aussi que bien évidemment, "|=" n'est pas un connecteur, puisqu'il n'est pas au même niveau que les connecteurs. Ce n'est pas un signe avec lequel on *construit* des propositions, c'est un signe avec lequel on exprime *une relation entre* propositions. (C'est, si on veut, un "méta-signe").

1.5.2.3 Exemples de règles d'inférence

Règle du détachement, ou du *Modus Ponens*.

$$\mathbf{\{p\ ,\ (p \Rightarrow q)\} \models q}$$

De là on déduit que pour toutes propositions A et B composées de variables propositionnelles, de connecteurs et de parenthèses on a:

$$\{A\ ,\ (A \Rightarrow B)\} \models B$$

Cette règle d'inférence est la plus fameuse. Frege a démontré qu'elle était suffisante dans le cadre d'un système formel du calcul propositionnel pour démontrer tous les théorèmes.

Règle du Modus Tollens.

$$\mathbf{\{(\neg q \Rightarrow \neg p)\ ,\ p\} \models q}$$

d'où bien sûr, pour toutes propositions A et B:

$$\{(\neg B \Rightarrow \neg A)\ ,\ A\} \models B$$

Reductio ad absurdum

$$\mathbf{\{\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p)\} \models q}$$

C'est la règle classiquement employée dans ce qu'on nomme le "raisonnement **par l'absurde**" (improprement, car il n'y a rien d'"absurde" là dedans!)

Règle d'élimination de la conjonction

$$\mathbf{\{p \wedge q\} \models p \quad et \qquad \{p \wedge q\} \models q}$$

Remarque : c'est la règle utilisée dans la déduction de (38) ou de (39) à partir de (37).

Règle d'introduction de la disjonction

$$\mathbf{\{p\} \models p \vee q \quad et \qquad \{q\} \models p \vee q}$$

Remarque : c'est la règle utilisée dans la déduction de (41) à partir de (40)

1.5.2.4 Tautologie et déduction

On démontre facilement:

Théorème 4:

a) $\models (A \Rightarrow B)$ si et seulement si $A \models B$

b) $\{A_1, A_2, ..., A_k\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, A_2, ..., A_{k-1}\} \models (A_k \Rightarrow B)$

Ce théorème justifie qu'on emploie le même signe pour indiquer la tautologie et pour symboliser la relation de déduction: dire qu'une proposition est une tautologie, c'est dire qu'elle est vraie sans aucune hypothèse particulière. On peut donc dire que "$\models A$" signifie en fait: "$\emptyset \models A$".

1.5.3 Retour sur l'implication.

La notion d erègle d'inférence nous permet de vérifier encore que la table de vérité choisie pour l'implication est bien « correcte ». Considérons en effet la règle "universelle" qui est celle du MODUS PONENS. Si nous voulons déduire Q à partir de $(P \Rightarrow Q)$, *elle impose que P soit vrai.* Il n'y a donc aucun danger dans l'acceptation des situations $F \Rightarrow V$ et $F \Rightarrow F$ dans la valeur de vérité "V" de $p \Rightarrow q$. D'une proposition fausse nous pouvons déduire n'importe quoi, certes. Mais ... une proposition fausse ne saurait être vraie! Aucune règle d'inférence ne nous permet donc d'utiliser une proposition fausse pour déduire quelque chose. Ici se marque bien la différence entre **déduction** et **implication**, différence cruciale pour toute la théorie logique.

Remarque: on se convaincra facilement que tout autre choix de valeurs de vérité pour les deux dernières lignes de la table du "$\Rightarrow$" conduirait soit à une symétrie des deux côtés du "$\Rightarrow$" soit à la possibilité de déduire quelque chose de la fausseté de l'antécédent, ce que nous ne voulons pas. Le propre de l'implication ($p \Rightarrow q$) est de dire que lorsque p est vrai, nécessairement q l'est aussi, mais que **lorsque p est faux, on ne peut *rien* dire**.

1.6 Sémantique des phrases et logique propositionnelle

1.6.1 Rôle de la logique dans l'analyse de l'argumentation

Cette digression sur la logique nous a montré l'utilité de la logique propositionnelle : grâce à elle, nous avons une théorie de l'inférence. Autrement dit, nous savons parfaitement dire dans certains cas si une phrase peut être considérée comme conséquence logique d'un ensemble d'autres phrases. Nous pouvons dire aussi si une argumentation est correcte. Considérons par exemple, le court passage suivant (à peine modifié d'un extrait de livre du philosophe contemporain Charles Taylor[1]), composé de phrases dont on nous assure qu'elles sont vraies :

> *Si l'idéologie de l'authenticité prend la forme d'un relativisme, il lui devient impossible de défendre quelque idéal moral que ce soit. Défendre un idéal moral suppose en effet qu'il existe des formes de vie plus élevées que d'autres, mais une culture fondée sur la tolérance de toute forme d'épanouissement individuel refuse de le reconnaître.*

Nous pouvons nous interroger sur sa cohérence, autrement dit, nous demander par exemple si le « en effet » de la deuxième phrase se justifie. Cet « en effet » est justifié si et seulement si l'argument présenté dans la deuxième phrase prouve la validité de la première.
Soit donc p la proposition exprimée par : *l'idéologie de l'authenticité prend la forme d'un relativisme*, soit q la proposition exprimée par : *il lui devient impossible (à l'idéologie de l'authenticité) de défendre quelque idéal moral que ce soit,* autrement dit : *l'idéologie de l'authenticité ne peut défendre un idéal moral*, soit r la proposition exprimée par : *il existe des formes de vie plus élevées que d'autres*.
Alors la première phrase se représente par : $p \Rightarrow q$, la deuxième par, dans sa première partie : $\neg q \Rightarrow r$, et dans sa deuxième partie (après *mais*) : $p \Rightarrow \neg r$.
En posant p comme hypothèse, nous voyons que nous pouvons faire les inférences suivantes :

1. p	hypothèse
2. $p \Rightarrow \neg r$	deuxième argument (ou prémisse 2)
3. $\neg r$	par application du *modus ponens*
4. $\neg q \Rightarrow r$	premier argument (ou prémisse 1)
5. q	par application du *modus tollens*

Donc il est bien vrai que lorsque p est vrai, q est nécessairement vrai, autrement dit que $p \Rightarrow q$ est vrai, ce que dit la première phrase. Le « en effet » est donc bien justifié.
Maintenant le texte se poursuit par : *il faut bien qu'un idéal moral soutienne le relativisme*, autrement dit, par une phrase qui exprime le fait que *même si l'idéologie de l'authenticité prend la forme d'un relativisme, elle doit défendre un idéal moral*, donc une proposition qui se représente par : $p \Rightarrow \neg q$.
L'auteur conclut : *il y a quelque chose de contradictoire dans l'idéologie de l'authenticité.*
Est-ce que cette déduction est correcte ? La réponse est oui, car en effet, dans le cas où p est vrai, nous aurions à la fois : q (notre raisonnement ci-dessus) et maintenant, avec cette nouvelle prémisse et encore par *modus ponens* : $\neg q$, donc nous aurions $q \wedge \neg q$. Ce qui est bien en effet contradictoire.

[1] Charles Taylor, *Le malaise de la modernité*, ed. du Cerf, 2005, p. 25.

Ceci dit, nous ne sommes pas allés très loin dans l'analyse du texte. En particulier aucun raisonnement formel ne nous dit que « *une(certaine) culture est fondée sur la tolérance de toute forme d'épanouissement individuel*» équivaut à « *l'idéologie de l'authenticité prend la forme d'un relativisme »,* ni que *« ne pas pouvoir défendre quelque idéal moral que ce soit »* a la même signification que *« refuser de reconnaître qu'il existe des formes de vie plus élevées que d'autres ».*

1.6.2 Les connecteurs de la langue se comportent-ils toujours comme les connecteurs logiques ?

Si les connecteurs logiques sont utiles, il ne faudrait pourtant pas croire qu'ils décrivent parfaitement les connecteurs utilisés dans la langue ordinaire. Est-ce que la conjonction de coordination « et » correspond bien toujours au « $\wedge$ » ? Est-ce que la conjonction de subordination « si » correspond bien toujours à « $\Rightarrow$ » ? etc.
Regardons quelques exemples. Soit les phrases suivantes :

(14) Pierre ouvrit la porte et entra dans la pièce
(15) Pierre a frotté l'allumette et la flamme a jailli
(16) Tu me dis qu'il est gravement malade et je le rencontre dans la rue !
(17) Le drapeau de la Suisse est rouge et blanc

Les phrases de (14) à (16) comportent un « et » qu'on ne saurait simplement analyser comme le connecteur « $\wedge$ ». Si cela était, « $\wedge$ » étant commutatif ($A \wedge B \equiv B \wedge A$), (14) serait équivalent à : (14') *Pierre entra dans la pièce et ouvrit la porte*, or nous ne jugeons pas ces deux phrases équivalentes car le « et » qu'elles contiennent porte l'indice d'une **succession** dans le temps. De même pour (15), où « et » porte un indice de **causalité**. (16) est plus complexe. Le « et » y réfère à tout un raisonnement implicite : si tu me dis qu'il est gravement malade alors j'en infère qu'il ne peut pas se déplacer, et cela est contradictoire avec le fait que je le rencontre dans la rue. Quant à (17), comparons-là avec (18) *Pierre est médecin et randonneur cycliste*. (18) est équivalent à « *Pierre est médecin et Pierre est randonneur cycliste* » (qu'on peut traduire par un « $\wedge$ »), alors que (17) ne peut pas se traduire en « *le drapeau Suisse est rouge et le drapeau Suisse est blanc* ».
Pour le *si … alors*, nous avons aussi de nombreux cas de discordance avec « $\Rightarrow$ ».

(19) si Marie va à la fête, alors Paul ira aussi
(20) si tu rentres après minuit, tu seras puni demain
(21) si tu as soif, il y a de la bière dans le frigo

La plupart des gens qui entendent (19) pensent que si Marie ne va pas à la fête, Paul n'ira pas, or cette inférence n'est absolument pas permise par la table de vérité de l'implication. (si Marie ne va pas à la fête, on ne peut rien déduire, c'est seulement si Paul n'y va pas qu'on peut déduire quelque chose – par *modus tollens* – en l'occurrence que Marie n'y va pas).
De même, dans le cas de (20), l'interprétation du « si » comme « $\Rightarrow$ » nous contraindrait à admettre la phrase vraie si l'interlocuteur rentre avant minuit et qu'il est quand même puni le lendemain ! Comme dans le cas de (19), celui auquel elle s'adresse comprend que s'il ne rentre pas après minuit, il ne sera pas puni. Pour (21) c'est un peu différent : on se doute bien que la bière n'apparaît pas dans le frigo par miracle les moments où on a soif ! La bière est ou n'est pas dans le frigo, autrement dit, (21) a exactement les valeurs de vérité de son conséquent, c'est-à-dire de « il y a de la bière dans le frigo », et non pas les valeurs de vérité de « tu as soif $\Rightarrow$ il y a de la bière dans le frigo ».

De nombreux sémanticiens (voir en particulier R. Posner, 1980, repris dans *Semantics* de David et Gillon) pensent que ces interprétations particulières viennent *de la pragmatique* : autrement dit, elles émanent des circonstances particulières dans lesquelles les phrases sont énoncées. Par exemple, si je dis à quelqu'un « il y a de la bière dans le frigo », je peux penser qu'il risque de trouver mon assertion incongrue si je la formule de manière isolée. A cause de cela, je présente en même temps une raison de la proférer, et j'indique cette raison par un « si » qui se trouve être l'homonyme du *si* logique.
Nous reviendrons plus tard sur cet aspect pragmatique.

1.6.3 Inférences autres que propositionnelles

Les inférences logiques ne viennent pas toutes uniquement des lois de la logique propositionnelle. Nous sommes habitués en particulier aux fameux syllogismes (voir plus haut, le paragraphe 1.4.2) tels que :

(22) Tout homme est mortel
Socrate est un homme
Donc Socrate est mortel

Plutôt que de reprendre l'antique théorie du syllogisme d'Aristote, nous procèderons de manière plus moderne à partir de la notion de condition de vérité et de la représentation de ces dernières dans le langage de la théorie des ensembles.
Par exemple, la phrase « **les chevaux sont des mammifères** » se traduit par une relation d'inclusion $C \subset M$, où C est l'ensemble des chevaux et M l'ensemble des mammifères. (Souvent, nous noterons [[**u**]] l'ensemble associé au nom commun **u**). La condition de vérité de cette phrase *est donc* cette relation d'inclusion. Autrement dit, de deux choses l'une : ou bien cette relation d'inclusion a lieu (aucun cheval n'est autre chose qu'un mammifère) et la phrase est vraie ou bien nous trouvons un cheval qui n'est pas un mammifère et elle est fausse. Ainsi le syllogisme précédent se résout-il facilement en écrivant :

[[**homme**]] $\subset$ [[**mortel**]]
Socrate $\in$ [[**homme**]]
Donc : Socrate $\in$ [[**mortel**]]

Bien sûr, nous souhaitons aller plus loin… quelle est ainsi la condition de vérité de la phrase (23) ou de la phrase (24) :

(23) Tous les gens qui possèdent un chat le caressent régulièrement
(24) Tout ce que Pierre offre à Marie est coûteux

C'est ce que nous verrons plus loin, après avoir (re)vu quelques notions de théorie des ensembles.
Notons alors que lorsque nous serons capables de traduire les conditions de vérité de phrases complexes, alors nous serons capables de résoudre des problèmes d'inférence également complexes.
Définition : soit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les conditions de vérité de phrases $p_1, p_2, \ldots, p_n$, exprimées comme des relations entre ensembles et entre éléments et ensembles (c'est-à-dire au moyen des relations $\subset$ et $\in$), soit D la condition de vérité d'une phrase q. Nous dirons que les phrases $p_1, p_2, \ldots, p_n$, permettent de déduire la phrase q si et seulement si chaque fois que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont simultanément vraies, D est vraie également.
On trouvera en exercices de nombreux exemples de déductions entre phrases comme on peut en trouver dans le livre de Lewis Carroll[2], *Logique sans peine*.

---

[2] Lewis Carroll (1832 – 1898), en même temps qu'il était l'auteur *d'Alice au Pays des Merveilles*, était professeur de logique à Cambridge et il a rédigé de nombreux ouvrages et articles de logique.