Sémantique

Cours de Licence de Sciences du Langage (L2)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

Cours n° 3 – Une sémantique basée sur la notion de modèle

2 Sémantique basée sur la théorie des modèles

2.1 Rappels : de l'usage des valeurs de vérité

Dans les cours précédents, nous avons insisté sur le fait que les phrases pouvaient exprimer des *propositions*, pouvant être *soit **vraies** soit **fausses***. Cela nous aide considérablement pour définir une relation de conséquence logico-sémantique entre phrases. Nous avons pu dire ainsi qu'une phrase A *permet d'inférer* une phrase B si et seulement si *A ne peut jamais être vraie sans que B le soit aussi*. Par exemple (cf. exercices n°1) :

- « **Marie court vite** » permet d'inférer « **Marie court** »

(il est impossible que Marie court vite sans qu'elle court, alors qu'il est possible que Marie court sans qu'elle court vite), ou bien :

- « **La candidate recherchée sera brune** » permet d'inférer « **la candidate recherchée sera brune *ou* parlant anglais** »

(au sens où si on suppose une situation où il est dit que pour un casting, on recherche une fille brune *ou* parlant anglais, le fait de présenter une fille brune répondra à la condition), ou encore :

- « **Aucun étudiant n'est inscrit au cours de sémantique** » permet d'inférer que « **moins de quatre étudiants sont inscrits au cours de sémantique** »

(si on imagine par exemple qu'un règlement stipule que les cours avec moins de quatre étudiants inscrits ne pourront pas ouvrir, alors en ce cas, la situation « aucun étudiant n'est inscrit » vérifie la condition « moins de quatre étudiants sont inscrits »). De fait il est impossible qu'il n'y ait aucun étudiants inscrits et qu'en même temps il y en ait plus de quatre ! etc.

Nous avons remarqué que, dans tous ces exemples, on passait d'une phrase contenant *plus d'information* vers une phrase en contenant *moins*. *De fait, il en est toujours ainsi pour les inférences proprement logiques : les règles d'inférence logique n'ajoutent jamais d'information, elles utilisent celle qui est déjà présente, c'est tout.*

2.2 Phrases, propositions et états de fait

En disant que les phrases expriment des propositions, nous avons bien sûr mis une différence entre « phrase » et « proposition » : *une phrase est une unité syntaxique*, *une proposition est une unité sémantique*. « **Les électeurs ont élu Jean** » et « **Jean a été élu par les électeurs** » sont deux phrases différentes, mais *toutes les deux expriment la même proposition* (ont le même sens, si on veut) c'est-à-dire que *l'une ne peut pas être vraie sans que l'autre le soit aussi*, autrement dit elles sont *logiquement équivalentes* : là encore nous utilisons implicitement les valeurs de vérité pour dire que ces deux phrases *ont le même sens*.

Maintenant, dire que la proposition exprimée par l'une des deux phrases « **les électeurs ont élu Jean** » ou « **Jean a été élu par les électeurs** » est **vraie**, c'est dire (banalement) qu'elle correspond à *un état de fait* (que, dans la réalité, Jean a bien été élu par les électeurs !). Nous dirons qu'une phrase déclarative *dénote le vrai* si la proposition qu'elle exprime correspond à un état de fait. Le verbe « dénoter » est ici utilisé pour signifier une relation entre des expressions linguistiques et des objets extérieurs (qui réfèrent « au monde »). Une phrase déclarative peut donc dénoter *le vrai* ou *le faux* (par convention, **1** ou **0**).

2.3 Des unités autres que la phrase

Il reste à savoir ce que dénotent les autres expressions linguistiques que les phrases : que dénotent par exemple les noms propres ? les noms communs ? les verbes intransitifs ? les adjectifs qualificatifs ? les verbes transitifs ? les verbes ditransitifs ? etc.
Dans le cas des inférences non propositionnelles que nous avons étudiées (voir par exemple les *syllogismes*), nous avons vu qu'une manière de vérifier si une inférence était valide ou non consistait à utiliser la *théorie des ensembles* (du moins dans son acception la plus élémentaire). Par exemple, vérifier la validité du syllogisme :

Aucun humain n'est immortel
Tout politicien est un humain
Donc aucun politicien n'est immortel

Peut se faire aisément en associant aux propriétés *humain*, *immortel* et *politicien* des ensembles, que nous pouvons noter H, I et P de telle sorte que :

$$H \cap I = \phi$$

et $$P \subset H$$

d'où il ressort qu'en effet, on a :

$$P \cap I = \phi$$

Or, nous constatons que *humain*, *immortel* et *politicien* sont soit des noms communs, soit des adjectifs, mais en tout cas *ils expriment* ***des propriétés***. Ainsi de la même manière que les phrases expriment des propositions, il y a toute une catégorie d'expressions linguistiques qui expriment des propriétés. Et nous pouvons représenter des propriétés par des ensembles. Nous dirons alors que *ces expressions linguistiques dénotent des ensembles*.

2.4 Ensembles et fonctions indicatrices

Il y a une autre façon de voir les choses. Après tout, dire que les propriétés sont représentées par des ensembles, c'est prendre un pari sur le fait qu'on interprète une propriété (par exemple être un humain) comme son *extension* (l'extension d'une propriété P est l'ensemble des objets qui possèdent cette propriété P, par exemple l'extension de la propriété « être étudiant en sciences du langage » est l'ensemble des étudiants en sciences du langage). En réalité, on a plutôt tendance à penser qu'une propriété sert à *sélectionner* des objets. Par exemple la propriété « être un humain » sert à sélectionner les humains parmi tous les objets de l'univers. Quand on prend par exemple le chat Félix, la propriété « être un humain » assigne 0 à cet individu (« faux ») car Félix n'est pas un humain, de même si on prend l'astéroïde X15 (qui n'est même pas un animé !). En revanche, si on prend Yannick Noah ou mon copain Laurent, la propriété « être un humain » va leur assigner 1, car ce sont des humains. Une autre manière de voir une propriété consiste donc à dire qu'il s'agit d'une *fonction* de *U* dans {0, 1}, où *U* est l'univers (en tout cas cette partie de l'univers qui nous intéresse lors de l'étude d'un discours donné). Notons E_P l'extension de P (l'ensemble associé à la propriété P) et X_P la fonction de *U* dans {0, 1} qui associe **1** à x (où $x \in U$) si P est vraie de x et **0** sinon. Nous pouvons facilement vérifier ce qui suit :

$$X_P(x) = 1 \text{ si et seulement si } x \in E_P$$

Autrement dit, « appartenir à l'ensemble E_P » ou « donner à la fonction X_P la valeur 1 », c'est la même chose ! Chaque fois que nous avons un ensemble E qui correspond à une propriété P, nous pouvons fabriquer de manière unique la fonction X associée à P : on définit la fonction X par : X(x) = 1 si $x \in E$ et = 0 sinon. Et réciproquement, chaque fois que nous avons une fonction X associée à P, nous pouvons construire de manière unique l'ensemble E qui est l'extension de P : il suffit de définir E comme l'ensemble des x tels que X(x) = 1.

Autrement dit, nous pouvons considérer que les ensembles inclus dans U et les fonctions de U dans {0, 1} sont les mêmes objets, ce qui nous permettra de parler indifféremment des uns ou des autres.
Considérer que les propriétés (noms communs, adjectifs, verbes intransitifs[1]) ont pour dénotations des fonctions de U dans {0, 1} va nous être utile pour la suite, entre autres aussi parce que nous allons pouvoir généraliser ce genre de considérations.
Quelle est maintenant la dénotation d'un nom propre ? Nous allons admettre que c'est un objet particulier de *U* (un « individu »). Ainsi, dans « Félix est un chat », l'expression linguistique « Félix » dénote un individu et l'expression « est un chat » dénote une fonction des individus dans {0, 1} ou bien, ce qui revient au même, comme on l'a dit, un ensemble inclus dans *U* (l'ensemble des chats). La phrase est vraie si et seulement si l'individu dénoté par « Félix » appartient à l'ensemble C associé à « chat » ou bien si ce même individu donne la valeur **1** à la fonction de U dans {0, 1} associée à « chat ».
Nous en arrivons à dire en fin de compte que *les expressions linguistiques sont de plusieurs types, dépendant du type d'objet qu'elles peuvent dénoter*.
Les noms propres, qui dénotent des individus, seront dits de type « entité individuelle », que nous noterons **e**.
Nous noterons **t** le type des phrases (t pour « truth value »).
Alors le type des propriétés correspond aux fonctions des individus vers les valeurs de vérité, que nous noterons donc $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t}$
Nous arrivons aussi à dire que toute expression linguistique peut recevoir une dénotation. Nous allons préciser cette idée à l'aide de la notion de modèle.

2.5 La notion de modèle

2.5.1 Notion de cadre

A priori, d'après ce que nous venons de voir, pour « interpréter » une phrase (ou toute autre expression syntaxiquement correcte), nous avons besoin de tout un attirail d'éléments, d'ensembles et de relations. Nous allons appeler **cadre** la donnée d'un ensemble non vide D (notre « domaine » d'interprétation) et d'un certain nombre de sous-ensembles de D, et de relations sur D (autrement dit des sous-ensembles de D^n, pour un n quelconque).
Par exemple :
$D = \{a, b, c, d\}$
$E_1 = \{a, b\}$, $E_2 = \{a, c, d\}$, $E_3 = \{a, b, c\}$, $E_4 = \{c\}$, $E_5 = \{b, d\}$
$R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, d), (c, c), (d, d), (d, a), (d, b)\}$
$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
$R_3 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$
$T_1 = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, b, c), (b, c, a), (b, d, d), (b, d, a)\}$
etc.
Remarques : imaginez que D soit un ensemble de personnes, que E_1 représente la propriété "avoir moins de vingt ans », E_2 : « être un garçon », E_3 : « avoir moins de trente ans », E_4 : « lire l'Equipe », que R_1 représente la relation « apprécier », R_2 : « avoir la même identité que », R_3 : « habiter à côté de » et que T_1 représente la relation ternaire « x dit du bien de y à z ».

[1] Plus tard, nous verrons que le cas des verbes est plus compliqué car en général ils impliquent une notion d'évènementialité qui n'est pas prise en compte ici.

2.5.2 Fonction d'interprétation et modèle

Ensuite nous définissons une fonction *I* (dite *fonction d'interprétation*) qui, à toute expression de notre langage, associe un ingrédient du cadre (un élément de D, une partie de D, de D^n etc. ou bien encore une valeur de vérité (0 ou 1)).
Au départ, *I* assigne une valeur aux expressions du lexique, mais le but est d'étendre *I* (grâce au principe de compositionnalité) de manière à ce que *I* assigne une valeur à *tout constituant* de la phrase et donc, à la fin, à la phrase toute entière. Nous allons pour cela spécifier quelle démarche cohérente il faut suivre pour parvenir à cette extension.
Prenons l'exemple très simple suivant :
Exemple 1
Lexique :
Pierre, est_marié
Soit la phrase *p* = « **Pierre est marié** », avec l'analyse syntaxique suivante : (fig. 1)

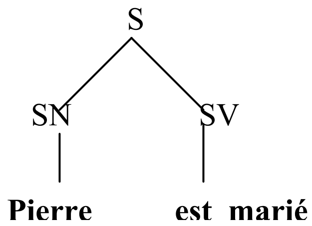


Figure 1

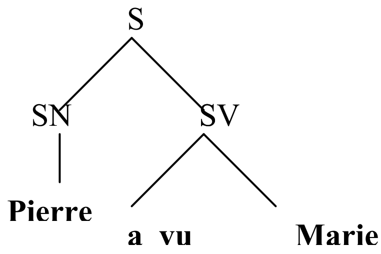
Soit le cadre *F* précédent. Pour interpréter *p*, il nous faut une fonction *I*, d'abord définie sur le lexique. Supposons que I(**Pierre**) soit l'élément b de D et que *I*(**est_marié**) soit un sous-ensemble de D (l'ensemble de tous les gens mariés), par exemple : *I*(**est_marié**) = E_5.
Remarquons que cela revient au même d'avoir pour *I*(**est_marié**) la fonction de D dans {0, 1} définie par :

$$(*) \quad \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 1 \\ c \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 1 \end{cases}$$

Nous pouvons étendre *I* récursivement en disant que chaque fois qu'une unité *c* est combinée avec une unité *c'* au moyen d'une règle R, alors si *c* est du type d'une fonction et si *c'* est du type attendu de l'argument de cette fonction (ou l'inverse), alors l'image par *I* du constituant obtenu est le résultat de l'application de la fonction à l'argument. Ici, l'unité « **est_marié** » est combinée avec l'unité « **Pierre** » au moyen de la règle selon laquelle on peut obtenir une phrase en fusionnant un nom propre et un syntagme verbal. Il se trouve que « Pierre » est du type d'une entité individuelle, c'est-à-dire dénote un individu, élément de D, et que « est_marié » est du type $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t}$ (des fonctions qui associent une valeur de vérité à un élément de D), c'est-à-dire dénote une fonction de D dans {0, 1}, donc la composition sémantique peut se faire : le résultat sera le produit de l'application de la fonction dénotée par « est_marié » à l'individu b que dénote Pierre. Mais on voit tout de suite que l'application de (*) à b donne 1. Donc la phrase « **Pierre est marié** », par rapport à notre modèle, est vraie.

Exemple 2 :
Lexique :
Pierre, Marie, a_vu
Soit la phrase : p = « **Pierre a_vu Marie** », de représentation syntaxique :

…



Alors pour interpréter p, nous avons besoin :
1) d'un cadre : fourni par *D* (un ensemble d'individus) + les sous-ensembles de *D* et les relations sur *D*, admettons *D = {a, b, m, p}*,
2) une fonction d'interprétation *I*, d'abord définie sur le lexique, admettons :

> *I*(**Pierre**) = p
> *I*(**Marie**) = m
> *I*(**a_vu**) = *{(a, b) , (a, m), (a, p), (b, a), (b, p), (m, a), (m, p), (p, a), (p, m)}*

(on a: (x, y)$\in$ *I*(**a_vu**) si et seulement si x **a vu** y).

Noter que *I*(**a_vu**) peut aussi se représenter par une fonction qui à tout individu i associe une fonction qui à tout individu j associe 1 si j a vu i, et 0 sinon, c'est cette fonction que nous allons utiliser. On peut la représenter comme suit :

$$f_{a\_vu} \begin{cases} a \to \begin{cases} a \to 0 \\ b \to 1 \\ p \to 1 \\ m \to 1 \end{cases} \\ b \to \begin{cases} a \to 1 \\ b \to 0 \\ p \to 0 \\ m \to 1 \end{cases} \\ p \to \begin{cases} a \to 1 \\ b \to 1 \\ p \to 0 \\ m \to 1 \end{cases} \\ m \to \begin{cases} a \to 1 \\ b \to 0 \\ p \to 1 \\ m \to 0 \end{cases} \end{cases}$$

Maintenant, nous pouvons étendre la fonction *I* récursivement de la même manière que dans le premier exemple.
Ici, le SV « a_vu Marie » est obtenu en combinant par une règle syntaxique le verbe transitif « a_vu » et le nom propre « Marie », on aura donc :

> *I*(**a_vu Marie**) = *I*(**a_vu**)(*I*(**Marie**)) = {a*, p*}

Ou encore simplement la fonction {a* → 1, b* → 0, m* → 0, p* → 1}.
Ensuite, la phrase est obtenue en combinant le SV ainsi obtenu avec le nom propre « **Pierre** », on obtiendra donc :

I(**Pierre a_vu Marie**) = I(**a_vu Marie**)(I(**Pierre**)) = 1

Finalement nous sommes arrivés à la conclusion que, dans ce modèle, la phrase « **Pierre a vu Marie** » reçoit la valeur **vrai**.

Définition : *nous appellerons* ***modèle*** *pour un ensemble de phrases Φ la donnée d'un cadre F et d'une fonction d'interprétation I tels que I assigne à toute phrase de Φ une valeur de vérité.*

2.5.3 Objets d'un autre type

Pour l'instant, nous n'avons considéré que des expressions des types t, e, e→t, e→(e→t). Nous pouvons évidemment considérer beaucoup d'autres types sémantiques. Nous pouvons même admettre que sont des types toutes les formules obtenues à partir des deux types primitifs e et t, au moyen de la flèche « → ».

Nous pouvons aussi considérer des opérations de réduction d'une suite de types. Par exemple, il est clair que puisque e→t est le type d'une expression fonctionnelle qui, à partir d'un individu x (de type e) détermine une valeur de vérité (t), si nous avons une suite :

e, e→t

comme dans le cas d'une phrase « **Pierre chante** », nous pourrons dire qu'elle se réduit au type d'une valeur de vérité t (« **Pierre chante** » est soit vrai soit faux). Nous opérerons de telles réduction en respectant les structures syntaxiques des phrases, par exemple, pour une phrase avec verbe transitif, nous aurons la suite de réductions suivante :

$$\dfrac{e, \quad \dfrac{e\rightarrow(e\rightarrow t), \quad e}{e\rightarrow t}}{t}$$

qui indique que nous réduisons d'abord le verbe avec son objet, puis le SV ainsi obtenu avec son sujet.

La règle générale de réduction est :

AF (« application fonctionnelle ») : *si une expression α est de type a et si une expression β est de type a→b, alors un constituant (α, β) ou un constituant (β, α) sera de type b.*

Il semble naturel d'associer aux expressions d'une même catégorie syntaxique le même type sémantique. Posons par exemple le tableau suivant, qui établit une correspondance entre catégories syntaxiques et types sémantiques.

SN	**e**
N	**e→ t**
Vt	**e→ (e→ t)**
Vi	**e→ t**
SV	**e→ t**
A	((**e→t**)→(**e→ t**))
S	**t**
Det def	(**e→ t**)**→ e**

Exemples :

- un nom (N), comme *chat*, a le type sémantique <**e**, **t**>,
- un déterminant défini (Det def) comme *le* a le type sémantique <<**e**, **t**>, **e**>
- un syntagme nominal (SN) comme *le chat* a le type sémantique **e**
- un verbe transitif (Vt) comme *caresse* a le type sémantique <**e**, <**e**, **t** >>
- un nom propre (SN) comme *Pierre* a le type sémantique **e**

- un syntagme verbal (SV) comme *caresse le chat* a le type sémantique <**e**, **t**>
- une phrase (S) comme *Pierre caresse le chat* a le type sémantique **t**

Exercices :
1- Quels types donner aux mots des phrases suivantes pour obtenir la réduction de la suite des types à **t** ?

a- Le garçon blond regarde Marie
b- Pierre caresse souvent le chat
c- Pierre croit que Marie possède ce chat
d- Le garçon blond parle à la fille avec le pull bleu

2- On donne à un déterminant interrogatif comme *quel* le type $(e \to t) \to ((e\to t) \to t)$, et on ajoute une règle de réduction, dite de composition fonctionnelle :

CF (« composition fonctionnelle ») : *si une expression α est de type $a\to b$ et si une expression β est de type $b\to c$, alors un constituant (α, β) ou un constituant (β, α) sera de type $a\to c$.*

Faire la réduction au type t de la question : *quel livre Marie a(-t-elle) lu ?*, même question avec *quel livre tu penses que Marie a lu ?*

2.5.4 Types et interprétations

On doit maintenant se poser la question : du point de vue de la théorie des modèles, que représente un type sémantique ? Nous avons commencé de répondre à cette question au en ce qui concerne e, t, e→ t, e→ (e→ t). Nous pouvons maintenant être plus exhaustifs. La réponse tient dans le tableau suivant :

t	$\{0, 1\}$
e	D
e→ t	$\{0, 1\}^D$
e→(e→t)	$(\{0,1\}^D)^D = \{0,1\}^{D\times D}$
(e→t) →e	$D^{\{0,1\}^D}$

Commentaires :

- **t** est interprété comme l'ensemble des valeurs de vérité (t = *truth value*), autrement dit toute expression de type t a une valeur qui est soit 1 (vrai) soit 0 (faux),
- **e** est interprété comme l'ensemble des individus du domaine, autrement dit toute expression de type e a pour valeur un individu de cet ensemble, noté D,
- **e→ t** est interprété comme l'ensemble des fonctions totales de D dans {0, 1}, autrement dit toute expression de type <**e**, **t**> a pour valeur une fonction totale qui, à tout individu associe une valeur de vérité, une telle fonction est toujours associée à un prédicat unaire, c'est-à-dire *une propriété*. De ce point de vue, notre affectation de type signifie simplement que *tout nom commun est conçu sémantiquement comme une propriété* (au nom commun *philosophe*, correspond la propriété *être_un_philosophe*),
- **e→(e→t)** est interprété comme l'ensemble des fonctions totales de D dans l'ensemble des fonctions totales de D dans {0, 1}, autrement dit toute expression de type **e→(e→t)** a pour valeur une fonction totale qui, à un individu du domaine, associe une fonction totale qui, à un individu du domaine, associe une valeur de vérité. Cette fois, il faut donc *deux* individus pour donner une valeur de vérité. On sait que l'ensemble

de fonctions totales en question est *isomorphe* à l'ensemble des fonctions totales de D×D dans {0, 1} (intuitivement, cela revient au même de procéder en deux temps : d'abord donner le premier individu, puis le deuxième, ou en un seul temps : donner d'un coup les deux individus sous forme d'un couple).

- **(e→t)** → **e** est interprété comme l'ensemble des fonctions totales de l'ensemble des fonctions totales de D dans {0, 1} dans D. Autrement dit, toute expression de type **(e→t)** → **e** a pour valeur une fonction totale qui, étant donnée une fonction totale de D dans {0, 1} (*une propriété*), lui associe un individu. C'est le type que nous avons donné provisoirement à un déterminant (seulement les définis). Considérons en effet le déterminant défini *le*. A partir du nom *philosophe*, représenté par la propriété *être_un_philosophe*, *le* permet d'obtenir un individu bien particulier. On peut donc associer à *le* cette fonction particulière qui, étant donné l'extension d'une propriété, va sélectionner un individu de cette extension (une fonction *de choix* en quelque sorte). Nous verrons cependant plus loin que cette assignation de type ne convient pas aux autres déterminants comme *un, chaque, quelque, tout* etc.

Nous pouvons évidemment résumer le tableau et les commentaires précédents par une définition récursive très simple :

Définition [<u>dénotation des types sémantiques</u>] : étant donné un domaine (supposé non vide) *D* et une fonction d'interprétation *I*, les types sémantiques sont interprétés à partir du domaine *D* de la manière suivante :

- $I(\mathrm{t}) = \{0, 1\}$
- $I(\mathrm{e}) = D$
- pour tous types *a* et *b*, $I(a \to b) = I(b)^{I(a)}$

Exercices :

3- Quelles sont les interprétations des phrases suivantes dans le modèle fourni par :

D = {a, b, c, d, e}
I(**garçon**) = {a, e}
I(**chat**) = {d}
I(**fille**) = {b, c}
I(**Marie**) = c
I(**Pierre**) = a
I(**blond**) = la fonction qui, à tout sous-ensemble A de D associe l'ensemble A ∩ {c, e}
I(**sait_que**) = la fonction qui, à tout couple (0, x) où x∈D, associe 0 et d'autre part : à (1, a) associe 1, à (1, b) associe 0, à (1, c) associe 1, à (1, d) associe 0 et à (1, e) associe 1.
I(**caresse**) = {(a, d), (a, c), (b, d), (c, d)}
I(**regarde**) = {(e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e)}

- **a- Le garçon blond regarde Marie**
- **b- Pierre caresse le chat**
- **c- Pierre sait que Marie caresse le chat**