Outils formels pour l'étude du langage

Cours de Master, ENS, MasterCog + LTD, A. Lecomte, 2009-2010

Ensembles et logique

1 Ensembles

Rappelons brièvement quelques notions de théorie des ensembles. Notons au passage que cette théorie est dite naïve, par opposition avec la théorie axiomatique des ensembles qui vise à éliminer certaines contradictions dont nous dirons un mot plus loin.
Les objets mathématiques peuvent être classifiés, on dit qu'ils appartiennent à différents **types**[1]. Le type le plus général est celui d'**ensemble**. Intuitivement, un ensemble est n'importe quelle collection d'objets pour laquelle la question de l'appartenance d'un objet quelconque à cette collection possède un sens (même si on ne sait pas toujours répondre, ou tout au moins, pas toujours répondre en un temps fini). Naïvement, un ensemble est défini soit par **énumération**, soit au moyen d'une propriété. Ainsi $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble et $\{x; x \textit{ est pair}\}$ est un ensemble. La relation primitive en mathématique des ensembles est la relation d'appartenance : $\in$. C'est une relation "asymétrique" en ce sens qu'à gauche figure un élément et à droite un ensemble. On écrit :

$$a \in A$$

pour dire que a est un élément de A (ou appartient à A). A partir de cette relation on peut définir l'égalité entre ensembles.
Principe d'extensionnalité :
Deux ensembles A et B sont dits égaux ($A = B$) si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments. On peut écrire :

$$A = B$$

si et seulement si

$$pour\ tout\ x, x \in A\ si\ et\ seulement\ si\ x \in B$$

Exercice :

1- Les ensembles suivants sont-ils égaux :
   - $\{a, \{a\}\}$ et $\{a\}$
   - $\{a, b, a, c\}$ et $\{b, c, a\}$
   - $\{\{a\}\}$ et $\{a\}$
   - $\{a, \{b, a\}\}$ et $\{a, \{b\}\}$

[1] De la même manière que les mots d'une langue appartiennent à diverses catégories morpho-syntaxiques

On aura remarqué que l'identité d'un ensemble ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énumérés ses éléments, ni du nombre de fois où on les énonce (les bégaiements ne comptent pas... !).
On peut aussi définir l'inclusion :

Inclusion :
Un ensemble A est dit inclus dans un ensemble B si et seulement tout élément de A est élément de B. On peut écrire :

$$A \subset B$$

si et seulement si

$$pour\ tout\ x, si\ x \in A\ alors\ x \in B$$

Avec cette définition, on remarque évidemment que :

$$A = B$$

si et seulement si

$$A \subset B\ et\ B \subset A$$

Exercices :

2- Soit $S = \{2, a, \{3\}, 4\}$ et $R = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$, les relations suivantes sont-elles exactes :
  - $\{a\} \in S$
  - $\{a\} \in R$
  - $\{a, 4, \{3\}\} \subset S$
  - $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset R$
  - $R = S$
  - $\{a\} \subset S$
  - $\{a\} \subset R$

3- Démontrer que pour tous ensembles A, B, C :
  - $A \subset A$
  - si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

4- Déduire de ce qui précède que la relation d'inclusion est une relation d'ordre

5- Est-ce une relation d'ordre totale ?

Parmi les ensembles il en est un particulier : l'ensemble **vide**.
En effet, si on prend une propriété contradictoire, par exemple "être différent de soi-même", c'est-à-dire la propriété qui se note "$x \neq x$", la définition au moyen d'une propriété nous dit qu'il existe un ensemble vérifiant cette propriété, mais évidemment cet ensemble ne contient aucun élément (il n'existe aucun x tel que $x \neq x$). On dit qu'il est vide.
Proposition : *il existe un seul ensemble vide*.
Pourquoi ? (*faire une démonstration par l'absurde !*)
Puisqu'il en est ainsi, on peut parler de **l'** ensemble vide. On le note $\emptyset$. On a par définition :

$$pour\ tout\ x,\ x \notin \emptyset$$

Plus surprenant : $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble ! Là aussi : pourquoi ? (*Raisonnez encore par l'absurde !*).

$$pour\ tout\ E,\ \emptyset \subset E$$

Exercice :

6- Avec les mêmes ensembles S et R, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
  - $\emptyset \in R$
  - $\emptyset \subset \{\{a\}\}$
  - $\{\emptyset\} \subset S$
  - $\emptyset \subset \{\{3\}, 4\}$

Un autre ensemble particulier, étant donné un ensemble E, est fourni par l'ensemble de ses parties, qu'on note $\wp(E)$.
$\wp(E)$ est l'ensemble de tous les ensembles inclus dans E (on dit : *sous-ensembles* ou bien *parties* de E).

$$X \in \wp(E)$$

si et seulement si :

$$X \subset E$$

Exercices :

7- Etant donné E quelconque, $\wp(E)$ peut-il être vide ?

8- Donner les éléments de :
  - $\wp(\{0, 1\})$
  - $\wp(\{a, b, c\})$
  - $\wp(\emptyset)$

9- Dessiner la relation d'ordre définie par l'inclusion sur $\wp(\{a, b, c\})$.

Opérations sur les ensembles :
On peut d'efinir des opérations sur les ensembles, c'est-à-dire des manières de les combiner, de façon à obtenir d'autres ensembles.

- **Union** :

$$x \in A \cup B$$

si et seulement si
$x \in A$ *ou* $x \in B$

- **Intersection** :

$$x \in A \cap B$$

si et seulement si
$x \in A$ *et* $x \in B$

- **Différence** :

$$x \in A - B$$

si et seulement si
$x \in A$ *et* $x \notin B$

Exercices :

10- Démontrer que $\cap$ et $\cup$ sont associatives et commutatives

11- $\cap$ et $\cup$ ont-elles un élément neutre ?

12- On appelle élément absorbant d'une opération binaire $\star$ sur un ensemble E, tout élément a de E tel que pour tout $x \in E$, $x \star a = a \star x = a$. $\cup$ et $\cap$ ont-elles un élément absorbant ?

13- Un ensemble a-t-il un symétrique pour chacune des opérations $\cap$ et $\cup$?

14- Démontrer que :
– $A \cup (A \cap B) = A$
– $A \cap (A \cup B) = A$

15- Démontrer que
– $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
– $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Noter que, pour prouver ces égalités, nous avons besoin d'un peu de logique propositionnelle (voir plus loin), juste un peu : il s'agit de dire ce que nous entendons par *et* et par *ou*, que nous noterons respectivement $\wedge$ et $\vee$. Ici, nous admettons que nous savons parfaitement ce que signifie le fait que $x \in E$, pour un ensemble E et un objet x donnés, soit vrai, ou bien soit faux. Par exemple nous avons une procédure qui nous permet en un temps fini pour chaque objet x de déterminer si $x \in E$ ou bien si $x \notin E$. Avec des ensembles finis, il n'y a aucun problème pour cela ! Nous écrivons $p = 1$ pour *p est vrai* et $p = 0$ pour *p est faux*. Nous obtenons les valeurs de $p \wedge q$ et de $p \vee q$ en fonction de celles de p et de q.

$p \wedge q$	$p = 1$	$p = 0$
$q = 1$	1	0
$q = 0$	0	0

$p \vee q$	$p = 1$	$p = 0$
$q = 1$	1	1
$q = 0$	1	0

Univers et complémentation

On admet en général qu'on travaille au sein d'un ensemble non vide, appelé **univers**. En ce cas, on peut définir pour tout ensemble E inclus dans cet univers, un autre ensemble, noté $\overline{A}$, par :

$$\overline{A} = E - A$$

Exercices :

16- Démontrer que :
– $A \cap \overline{A} = \emptyset$
– $A \cup \overline{A} = E$
– $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
– $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Nous pouvons ici étendre nos connaissances de logique propositionnelle : si nous savons déterminer, étant donnés x et un ensemble donné E si $x \in E$ ou non... alors nous savons déterminer si $x \notin E$ ou non ! Et nous pouvons utiliser la définition suivante de la négation :

p	1	0
$\neg p$	0	1

Produit cartésien

Etant donné deux ensembles E et F, en prenant $x \in E$ et $y \in F$, on peut définir un *couple*, noté (x, y). On impose que $(x, y) \neq (y, x)$ (prendre d'abord un élément dans E puis un dans F n'est pas la mm̂e chose que prendre d'abord un élément dans F puis un dans E). L'ensemble de tous ces couples est ce qu'on appelle le **produit cartésien** de E et de F, noté $E \times F$. D'après notre précaution, $E \times F \neq F \times E$. Si $E = F$, alors on obtient le produit $E \times E$, qu'on note E^2.

Exercices :

17- Faire la liste des éléments de l'ensemble $E \times F$, où :
  – $E = \{a, b, c, d\}$
  – $F = \{1, 2, 3\}$

18- Démontrer que :
  – $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
  – $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$
  – $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

Relation binaire :

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.
une relation binairesur E est un sous-ensemble de E^2

Exercices :

19- Vérifier que le relation $\leq$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$ correspond bien à cette définition.

20- Trouver un exemple de relation binaire entre un ensemble de mots et un ensemble de nombres entiers.

Fonction :

Une **fonction** de A vers B est une relation binaire entre A et B telle qu'à tout élément de A il corresponde *au plus un* élément de B. Le sous-ensemble D de A tel qu'à tout élément de D il corresponde exactement un élément de B est appelé le *domaine* de la fonction. Si f est une fonction de A vers B, ce qu'on note : $f : A \to B$, alors pour tout $x \in Dom(f)$ ($Dom(f)$ étant le domaine de la fonction f), lélément de B qui correspond à x est noté $f(x)$ et est appelé *l'image* de x par f.

Exercice :

21- Montrer que la relation binaire entre l'ensemble des individus immatriculés à la Sécurité Sociale et les nombres de 13 chiffres commençant par 1 ou 2 est une fonction ! Que se passerait-il sinon ?

Soit $f : A \to B$. Soit $C \subset B$, on note $f^{-1}(C)$ l'ensemble des éléments x de A tels que leur image soit dans C.

$$x \in f^{-1}(C)$$

si et seulement si

$$f(x) \in C$$

Si $C = \{y\}$, on note cela $f^{-1}(y)$ et on l'appelle *l'image réciproque de y par f*. On notera qu'en général $f^{-1}(y)$ n'est pas réduit à un seul élément (il peut être vide ou bien contenir plusieurs éléments).

Exercice :

22- Soit $f : A \to B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c\}$, la fonction f étant définie par la table :

1	2	3	4
a	b		a

Calculer $Dom(f)$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a, b\})$, $f^{-1}(c)$

Une fonction $f : A \to B$ telle que $Dom(f) = A$ est appelée une *application* de A vers B (engl. *mapping*).

Une application de A vers B est dite **surjective** si tout élément de B a une image réciproque non vide. On parle alors d'une *surjection*.

Une application de A vers B est dite **injective** si deux éléments distincts de A n'ont jamais la même image. On parle alors d'une *injection*.

Exercice :

23- La fonction de l'ensemble des individus immatriculés à la Sécurité Sociale vers les nombres de 13 chiffres commençant par 1 ou 2 est-elle :
- une application ?
- une surjection ?
- une injection ?

Une application de A vers B qui est à la fois une injection et une surjection est une **bijection** (engl. a *one-to-one mapping*).

Cardinal

Le *cardinal* d'un ensemble est son nombre d'éléments. On peut le noter $\#$. Par exemple, $\#\{0, 1, 2, 3\} = 4$.

De fait, on définit le cardinal au moyen d'une relation appelée *équipotence*. Notons-là ici $\approx$. On a :

$$A \approx B$$

si et seulement si

$$\textit{il existe une bijection de } A \textit{ vers } B$$

Par exemple, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ et $\{0, 1, 2\}$ sont équipotents. On dit dans ce cas qu'ils ont même cardinal. Pour chaque ensemble E, on peut définir un "grand" ensemble particulier, qui contient tous les ensembles équipotents à E : c'est "la classe de E pour la relation d'équipotence". Dans cette classe, on peut choisir un élément particulier, appartenant à toute une gamme d'ensembles : ce sont les ensembles construits selon le schéma :

$$\emptyset \to \{\emptyset\} \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \to \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \to \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \to ....$$

Autrement dit :
- on part de $\emptyset$
- à chaque pas, on construit un nouvel ensemble en prenant pour éléments tous les ensembles qu'on a déjà obtenus jusqu'ici

On voit que cette famille d'ensembles a la propriété *unique* (! !) que étant donnés deux ensembles ; α et β de cette forme, on a : $\alpha \in \beta$ si et seulement si $\alpha \subset \beta$. Ces ensembles sont appelés les **ordinaux**.
On admettra que toute classe d'équipotence possède un ordinal qui lui est propre. Cet ordinal est alors l'ensemble que l'on retient en tant que cardinal commun à tous les éléments de la même classe d'équipotence.
Evidemment, nous nous contentons par la suite de noter 0, 1, 2, etc. les ordinaux, c'est-à-dire les entiers. Noter toutefois que la définition s'étend aux ensembles infinis. Autrement dit, il existe un ordinal limite ω qui, par exemple, permet de définir le cardinal de l'ensemble infini $\mathbb{N}$.
Petit sujet de réflexion -1
Pour expliquer la monnaie, les économistes usent d'un raisonnement semblable. Soit la relation d'échange entre les marchandises. Soit la classe C de toutes les quantités de marchandises échangeables contre une quantité de marchandise m donnée. La monnaie sert d'étalon pour fixer la valeur.
Petit sujet de réflexion -2
Soit A et B deux ensembles. En fonction de quoi peut-on connaître $\#(A \cup B)$? En fait, la connaissance de $\#A$ et $\#B$ ne suffit pas...
Soit A et B deux ensembles. On fabrique cette fois des "copies" de ces deux ensembles : A' et B' telles que $A' \cap B' = \emptyset$. (Des copies sont simplement des images par une bijection). On note $A + B$ l'union des deux copies de A et de B. Cette fois, $\#(A + B) = \#A + \#B$. C'est parce qu'on a *délocalisé* A et B. L'union est localiste, la somme ne l'est pas.