Logique avancée

Cours optionnel de Licence, A. Lecomte, 2009-2010

Systèmes de déduction

Un système formel est défini par la donnée :

1. d'un ensemble de symboles (*l'alphabet*)
2. de règles de formation d'expressions dites *bien formées* (*ebf*) au moyen de ces symboles
3. d'un sous-ensemble d'ebfs, appelées *axiomes*
4. de règles dites *de déduction* s'appliquant chacune à une ou plusieurs ebfs pour obtenir une ebf particulière

Une déduction (ou preuve) est un enchaînement de règles de déduction appliquées successivement à partir d'un ou plusieurs axiomes.
Une déduction conduit alors à une ebf particulière qu'on appelle un *théorème*.

Un exemple trivial a pu être donné en exercice :

- Alphabet : $\{a, b, c\}$
- Règle de formation : est une *ebf* tout mot sur $\{a, b, c\}$ contenant un et un seul b et un et un seul c avec le b avant le c
- Axiome : bc
- Règles de déduction :
  - R1 : si u est une ebf, $u \to aua$
  - R2 : si $u = \alpha b\alpha' c\alpha''$, $\alpha b\alpha' c\alpha'' \to \alpha b\alpha' ac\alpha'' a$

Sont les théorèmes toutes les ebfs $\alpha b\alpha' c\alpha''$ telles que $|\alpha''| = |\alpha| + |\alpha'|$ où $|\sigma|$ désigne la longueur du mot σ.

Un autre exemple, beaucoup moins trivial, est le suivant.

- Alphabet :
  - lettres : $p, q, r, ...$
  - symboles : $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$
  - parenthèses : (,)
- Règles de formation (cf. règles de grammaire) :
  $S \to (S \wedge S)|(S \vee S)|(S \Rightarrow S)|(\neg S)|p|q|r|....$
- Axiomes : toutes les ebfs des formes suivantes :
  - $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$
  - $(\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \theta))$

– $(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi)$
où on peut substituer à ϕ, ψ, θ respectivement n'importe quelle ebf
– Règle de déduction :
$\{\phi, \phi \Rightarrow \psi\} \vdash \psi$ (Modus Ponens)

En réalité, ce n'est pas *une* règle de déduction mais *un schéma* de règle, parce que là encore, ϕ, ψ peuvent désigner n'importe quelle ebf (ce sont des variables).
On la notera aussi :

$$\frac{\phi \qquad \phi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

Il est possible de démontrer dans ce système le théorème :
– $\phi \Rightarrow \phi$

Démonstration de $\phi \Rightarrow \psi$:
Dans le deuxième axiome, faire les substitutions suivantes :
$(\phi \Rightarrow \phi)$ à ψ
ϕ à θ
Il vient : $(\phi \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi))$ qui est dont un axiome.
De même, dans le premier axiome, substituons $(\phi \Rightarrow \phi)$ à ψ, il vient le théorème :
$\phi \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi)$, qui est justement la partie gauche de l'axiome précédent, d'où une première application de la règle du Modus Ponens :

$$\frac{\phi \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi) \qquad (\phi \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi))}{(\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)}$$

Mais comme $(\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)$ est aussi un axiome, on peut encore appliquer la même règle et obtenir :

$$\frac{\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi) \quad (\phi \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \phi)}{(\phi \Rightarrow \phi)}$$

On peut aussi y démontrer un méta-théorème (*théorème de la déduction*) :
Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ alors $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi$
Ce qu'on notera aussi :

$$\frac{\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}$$

Ce dernier méta-théorème est précieux car il nous donne une méthode pour déduire une formule de la forme $\phi \Rightarrow \psi$: prendre ϕ comme *hypothèse* et en déduire ψ.

Le **théorème de complétude** de la logique propositionnelle énonce que ce système est tel que les théorèmes qu'il permet de démontrer sont toutes (et rien que) les tautologies[1]. Nous ne démontrerons

[1]en fait, le thérème de consistance dit que ce système ne démontre que des tautologies et le théorème de complétude qu'il les démontre toutes.

$$
\begin{array}{c|l}
1 & P\ (prem\ 1) \\
2 & Q\ (prem\ 2) \\
\vdots & \vdots \\
i & R\ (prem\ i) \\
\vdots & \vdots \\
n & C\ (conclusion)
\end{array}
$$

FIG. 1 – Forme générale d'une preuve en déduction naturelle

pas ce théorème dans ce cours. De fait, ce système n'est pas très pratique et on lui en préfère d'autres, basés sur d'autres types de règles.

Système de déduction naturelle

Les systèmes de déduction sont des ensembles de règles permettant de construire des preuves. L'un des systèmes correspondant le mieux à notre notion usuelle de preuve en mathématiques est celui qui est attribué à Frederic Fitch, lequel a amélioré une manière de présenter les déductions due au logicien polonais Stanislas Jaśkowski. Ce *style* de preuve consiste à disposer les formules qui sont successivement établies en une colonne, avec les prémisses en haut et la conclusion en bas (sur le schéma de la figure 1, il y a i prémisses et une conclusion). On appelle *déduction principale* l'espace qui figure immédiatement à droite de cette première barre verticale.
Il peut arriver que dans une déduction, on soit amené à faire des hypothèses : en ce cas, les formules qui se déduisent de ces hypothèses ne sont évidemment valides que sous les hypothèses correspondantes. Autrement dit, il existe une règle particulière qui permet d'introduire une hypothèse : elle consiste simplement à l'écrire de manière décalée d'un espace vers la droite et à ouvrir ainsi une *sous-déduction* qui démarre à partir d'elle. Nous pouvons à nouveau faire une hypothèse à l'intérieur de ce nouvel espace, et ce, autant de fois qu'on le désire. Par exemple, le schéma de la figure 2 comporte deux prémisses : A et B, puis une hypothèse C ouvrant une sous-déduction, puis dans cette sous-déduction une nouvelle hypothèse D. Il est toujours possible de répéter une formule déjà démontrée (ou une prémisse ou une hypothèse) à condition bien entendu que cette répétition se fasse dans l'espace approprié, c'est-à-dire à la verticale de la formule répétée ou bien dans une sous-déduction (ou une sous-sous-déduction etc. ainsi récursivement) ouverte après l'inscription de la formule répétée. On utilise pour cela la règle *répéter* (voir figure 3).
Les règles proprement logiques sont celles qui permettent d'utiliser une formule déjà prouvée pour parvenir à un résultat et celles qui permettent d'utiliser la structure de la conclusion pour nous guider dans la recherche d'une preuve. Utiliser une formule déjà prouvée (ou une prémisse ou une

$$
\begin{array}{l|l}
1 & A\ prem\ 1 \\
2 & B\ prem\ 2 \\
3 & \quad \begin{array}{|l} \underline{C} \end{array} \\
4 & \quad \begin{array}{|l} \quad \begin{array}{|l} \underline{D} \end{array} \end{array} \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \quad \begin{array}{|l} \vdots \end{array} \end{array}
\end{array}
$$

FIG. 2 – Déduction avec hypothèses

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A & \text{R}, m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
1 & A & \\
\vdots & \vdots & \\
i & \quad \begin{array}{|l} \underline{B} \end{array} & \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \vdots \end{array} & \\
m & \quad \begin{array}{|l} A \end{array} & \text{R}, 1 \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \vdots \end{array} &
\end{array}
$$

FIG. 3 – Règle *répéter*

$$
\begin{array}{c|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A \land B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A & \land\text{E}, m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A \land B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & B & \land\text{E}, m
\end{array}
$$

FIG. 4 – Elimination de la conjonction

$$
\begin{array}{c|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & B & \\
\vdots & \vdots & \\
p & A \land B & \land\text{I}, m, n
\end{array}
$$

FIG. 5 – Introduction de la conjonction

hypothèse) revient à *éliminer* son connecteur principal, alors qu'utiliser une conclusion pour nous guider dans la preuve revient à *introduire* son connecteur principal. D'où le fait qu'un système de déduction naturelle contient deux types de règles logiques :

– les règles *d'élimination*
– les règles *d'introduction*

á raison d'un couple de ces règles pour chaque connecteur.

Conjonction

Commençons par la conjonction. Les règles délimination et d'introduction sont données respectivement aux figures 4 et 5. La règle d'élimination possède deux variantes, selon qu'on "projette" sur le premier ou sur le deuxième conjoint.

Implication

Réglons immédiatement le cas de l'implication, qui est le connecteur qui nous sera le plus utile dans la suite.

La règle d'élimination (figure 6) est la règle d'inférence la plus connue en logique, à savoir celle du *modus ponens* qui dit qu'à partir de $A \Rightarrow B$ et A, on peut toujours déduire B, on l'appelle

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A \Rightarrow B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A & \\
\vdots & \vdots & \\
p & B & \Rightarrow\text{E}, m, n
\end{array}
$$

FIG. 6 – Elimination de l'implication

$$
\begin{array}{l|l|l}
1 & & A \\
\hline
\vdots & & \vdots \\
n & & B \\
n+1 & A \Rightarrow B & \Rightarrow\text{I}, 1\text{–}n
\end{array}
$$

FIG. 7 – Introduction de l'implication

aussi règle de détachement. La règle d'introduction (figure 7) reproduit également un processus de preuve auquel nous sommes habitués : prouver $A \Rightarrow B$, c'est *faire l'hypothèse* qu'on a A, et ensuite en déduire qu'on a B. Autrement dit, cette règle nous donne le premier cas où on utilise l'introduction d'hypothèse. La disjonction va nous donner un autre cas d'utilisation des hypothèses.

Disjonction
Introduction
L'introduction de la disjonction est symétrique par rapport à l'élimination de la conjonction. On a :

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A \vee B & \vee\text{I}, m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A \vee B & \vee\text{I}, m
\end{array}
$$

L'élimination, en revanche, est un peu particulière. Elle repose sur l'idée que $A \vee B$ ne permet d'inférer C que si à la fois A et B (chacun de son côté) permet d'inférer C. Par exemple, si de la buée sur la vitre permet d'inférer que la température extérieure est basse et si aussi le gel sur les arbres permet d'inférer que la température extérieure est basse, alors je peux inférer que la température est basse de la buée sur la vitre *ou* du gel sur les arbres ! Donc pour inférer C à partir de $A \vee B$, je me mets d'abord sous l'hypothèse A, je vérifie qu'on peut déduire C, et je fais la même chose avec B. D'où la règle :

$$\begin{array}{l|l}
\vdots & \vdots \\
i & A \vee B \\
\begin{array}{l} i+1 \\ \vdots \\ j \end{array} & \quad \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \\
\begin{array}{l} j+1 \\ \vdots \\ k \end{array} & \quad \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \\
l & C \qquad\qquad \vee\mathrm{E},\, i,\, i+1\text{–}j,\, j+1\text{–}k
\end{array}$$

Négation

Les règles pour la négation peuvent se déduire de l'interprétation de cette dernière selon laquelle *nier A* c'est dire que A implique l'absurde. Pour cela, on introduit une constante $\perp$ qui signifie le *faux* et qui ne possède qu'une règle d'élimination (pas de règle d'introduction), laquelle est :

$$\begin{array}{l|l}
\vdots & \vdots \\
i & \perp \\
i+1 & Q
\end{array}$$

Cette règle est celle que les logiciens médiévaux appelaient *ex falso quodlibet sequitur* : du faux, on déduit ce qu'on veut. On trouve alors pour la négation les deux règles suivantes :

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & \neg A & \\
n+1 & \bot & \neg\text{E}, m, n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l|l}
1 & A & \\
\cline{2-2}
\vdots & \vdots & \\
m & \bot & \\
\hline
m+1 & \neg A & \neg\text{I}, 1\text{–}m
\end{array}
$$

Comme on le voit, $\bot$ ne peut apparaître dans une déduction que *via* la règle d'élimination de $\neg$ (puisqu'il n' a pas de règle d'introduction qui lui soit propre), or, grâce à la règle d'introduction de la conjonction, on constate que ce sont exactement les cas où on peut déduire une contradiction $(A \wedge \neg A)$, ainsi $\bot$ a bien le sens d'une contradiction.
Nous avons ainsi obtenu un système pour construire des preuves, mais ce système est-il suffisant pour produire toutes les preuves de la logique classique ? On constatera (exercices) que non. En particulier, il lui manque deux schémas d'inférence qu'on utilise couramment en logique classique : la *loi du tiers exclu* et la règle de *double négation*. Intuitivement, ce n'est pas étonnant : prouver que l'on a le tiers exclu, c'est-à-dire $A \vee \neg A$ ne pourrait se faire qu'en utilisant la règle $\vee\ I$, or celle-ci suppose que soit connu soit A soit $\neg A$, or évidemment quand on utilise la loi du tiers exclu habituellement on ne sait pas lequel des deux termes est valide ! On peut d'autre part montrer que si on ajoute la règle de double-négation au système, alors la loi du tiers-exclu est prouvable (et réciproquement d'ailleurs), où la loi de double négation peut se formuler comme suit :

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
n & \neg\neg A & \\
n+1 & A & \neg\neg\text{E}, n
\end{array}
$$

Si on n'ajoute pas explicitement cette dernière règle on obtient donc un sous-système de la logique classique : ce qu'on appelle la *logique intuitionniste*, appellation qui se justifie si on sait que les tenants de l'intuitionnisme en mathématiques (notamment son grand maître Brouwer) refusaient justement l'utilisation de la loi du tiers exclu.
Nous allons revenir sur la déduction naturelle en logique intuitionniste au paragraphe suivant afin de montrer que les preuves dans cette logique ont la propriété agréable de pouvoir être disposées de manière arborescente (ce qui justifie entre autres l'utilité des calculs intuitionnistes en linguistique, quand on sait la faveur dont y jouissent justement les arbres !).

Déduction naturelle et logique intuitionniste

Sous la forme d'arbres

Règles d'introduction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,[\wedge\, I]$$

$$\frac{A}{A \vee B}\,[\vee_1\, I] \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\,[\vee_2\, I]$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ I]$$

$$\frac{\begin{array}{cc}[A] & [A]\\ \vdots & \vdots \\ B & \neg B\end{array}}{\neg A}\,[\neg\, I]$$

Règles d'élimination

$$\frac{A \wedge B}{A}\,[\wedge_1\, E] \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\,[\wedge_2\, E]$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,[\vee\, E]$$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\,[\Rightarrow\ E]$$

$$\frac{\neg A \quad A}{B}\,[\neg\, E]$$

Extension à la logique des prédicats du premier ordre

Règles d'introduction

$[i\,\forall]$:

Si nous nous contentions de domaines finis (ayant un nombre fini d'éléments), nous pourrions dire simplement que $\forall x A(x)$ est vrai si chaque fois que nous remplaçons x par le nom d'un individu du domaine, nous obtenons une proposition vraie. En ce cas, si par exemple le domaine est : $D = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, cela revient à trouver une preuve de la conjonction $A(c_1) \wedge A(c_2) \wedge ... \wedge A(c_n)$ où $c_1, ..., c_n$ sont les noms de $i_1, ..., i_n$, ou, en abrégé, une preuve de $\wedge_{i=1...n} A(c_i)$. Il suffirait d'appliquer la règle d'introduction de la conjonction. On peut résumer cette observation en remarquant ainsi qu'un $\forall$ peut être vu comme un $\wedge$.
Seulement, dans le cas d'un domaine infini (ou... trop grand !), nous devons passer par une autre méthode. L'idée est d'utiliser en ce cas une sorte d'individu *générique*, que nous représentons par une variable x. Pour être générique, ce qu'on appelle aussi *quelconque*, cet individu ne doit être doté d'aucune propriété particulière. x doit donc être une variable ne figurant dans aucune hypothèse qu'on aurait pu introduire au préalable. Néanmoins, il peut se faire que x figure dans une hypothèse, mais en ce cas il s'agit d'une hypothèse qui est justement déchargée au moment de prouver $A(x)$. On écrit :

$$\dfrac{\begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ A(x) \end{array}}{\forall x A(x)}$$

Condition : au cas où on utilise des hypothèses auxiliaires pour démontrer $A(x)$, x est une variable libre qui n'apparaît dans aucune de ces hypothèses, autrement dit c'est une variable qui n'a jamais encore été utilisée (on dit que c'est une variable *fraîche*). Autrement dit encore, *la variable qui devient liée au moment de l'utilisation de cette règle n'est active dans aucune hypothèse non encore déchargée*. Cette règle revient à dire : *soit un x quelconque*, prouvons que A est vrai de x.
Exemple :
Prouvons que $\forall x(A(x) \Rightarrow A(x))$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} [A(x)] \\ A(x) \end{array}}{A(x) \Rightarrow A(x)}}{\forall x(A(x) \Rightarrow A(x))}$$

Commentaire : on fait l'hypothèse que l'on a $A(x)$ pour un x quelconque, on en déduit évidemment que l'on a $A(x)$, on peut donc utiliser la règle d'introduction de l'implication, ce qui donne $A(x) \Rightarrow A(x)$. A ce stade, l'hypothèse contenant x est déchargée, on peut utiliser la règle d'introduction de $\forall$ qui va justement lier la variable x, qui n'est désormais active dans aucune hypothèse.
$[i\ \exists]$:
Là encore, si nous étions dans un domaine fini, nous pourrions simplement dire qu'il suffit de trouver une valeur dans ce domaine pour laquelle on a une preuve de $A(x)$. En ce cas, l'existentielle $\exists x A(x)$ correspond à une disjonction, on cherche une preuve de $A(c_1) \vee A(c_2) \vee ... \vee A(c_n)$, autrement écrit $\vee_{i=1...n} A(c_i)$. Il suffirait d'appliquer la règle d'introduction de la disjonction. On

peut résumer cette observation en remarquant ainsi qu'un $\exists$ peut être vu comme un $\vee$.
De fait, il suffit de trouver un individu particulier permettant de prouver A pour avoir une preuve de $\exists x A(x)$, nous pouvons donc dire qu'une preuve de $\exists x A(x)$ consiste dans le couple formé par un individu bien particulier du domaine D et une preuve de A pour cet individu. On peut trouver cet individu par son nom (d'après nos hypothèses) mais on peut le trouver aussi par une méthode. Dans ce dernier cas, on peut supposer qu'il y a un terme t pour le désigner même si nous ne savons pas exactement qui il est ! D'où la règle, avec sa condition :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A(t)\end{array}}{\exists x A(x)}$$

Condition : t est un terme. Ce terme doit être *libre* pour x. Qu'est-ce que cela veut dire ? Tout simplement qu'il ne doit pas s'introduire, au cours de l'application de la règle, un liage de variable intempestif non voulu ! Par exemple imaginons que t soit une variable y et que $A(t)$ soit $A(y) = (y \neq x)$, alors la conclusion serait : $\exists x\ (x \neq x)$! Autrement dit, du fait qu'un nombre y est différent d'un nombre x, on déduirait qu'il existe un nombre différent de lui-même, ce qui est absurde. Ici y n'est pas libre pour x signifie qu'on ne peut pas remplacer y par x dans l'expression sans lier une variable distincte de y qui jusqu'ici était libre. On peut toutefois substituer y par z dans cette expression car y est libre pour z. On obtiendrait : $\exists z\ (z \neq x)$. Et même y par lui-même car y est libre pour y, on obtiendrait : $\exists y\ (y \neq x)$.

Règles d'élimination
$[e\,\forall]$:
Evidemment si nous avons une preuve de $\forall x A(x)$, par définition, pour chaque individu i, nous avons une preuve de $A(c_i)$ et plus généralement, pour toute constante c, nous avons une preuve de $A(c)$, et de même pour toute variable. D'où la règle :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t)}$$

où t est un terme quelconque, là aussi *libre pour* x.
$[e\,\exists]$:
La règle d'élimination de $\exists$ ressemble nécessairement à celle du $\vee$. Intuitivement, si partant de n'importe quelle hypothèse $A(y)$, où, comme dans le cas de la règle $[i\,\forall]$, y apparaît comme variable libre non déjà présente dans une hypothèse auxiliaire, on arrive toujours à la même conclusion C,

on pourra déduire C de $\exists x A(x)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x A(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(y)]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}$$

Exemple : démontrons que $(\exists x A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\exists x A(x) \wedge B(x)]\\ \exists x A(x) \wedge B(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(y) \wedge B(y)]\\ A(y)\end{array}}{A(y)}}{\exists x A(x)}}{(\exists x A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)}$$

Commentaire : y est une variable, mais au cours de l'application de la règle $[e\ \exists]$, l'hypothèse sous laquelle on a déduit $A(y)$ se trouve déchargée. Cela signifie que y désigne bien un objet du domaine, on peut donc appliquer l'introduction de $\exists$.