

Introduction à la logique des prédicats du premier ordre

1. Introduction

1.1. La notion de prédicat

On appelle **logique des prédicats** la partie de la logique qui traite des *propositions analysées*. Autrement dit, dans le cadre de cette logique, on ne se contente plus de la notion de proposition vue comme un bloc et notée, dans le cas élémentaire, comme une lettre simple ($p, q, r, \dots$). La proposition est divisée (selon les termes anciens) en son *sujet* et son *prédicat*.¹ Par exemple, 'Pierre habite Paris', 'Lucien habite Paris', 'Julie habite Paris' sont autant d'instances d'un même schéma, que nous pourrions écrire: 'x habite Paris'. Dans ce schéma, x dénote une variable, dite *variable individuelle*, elle marque la place du "sujet". Le reste de la phrase est une partie constante: 'habite Paris', et se traduit en général par ce qu'on appelle en linguistique un Groupe Verbal. Nous dirons qu'il s'agit d'un *prédicat*.

Ces notions, comme beaucoup d'autres en logique, sont anciennes et remontent au moins à Aristote. La logique moderne leur a apporté, depuis Frege, un éclairage totalement nouveau. Cet éclairage provient des mathématiques, grâce à la notion de **fonction**. Nous avons déjà vu comment celle-ci intervenait en logique propositionnelle, par le biais des *fonctions de vérité*. Ainsi, lorsque nous disons une phrase comme:

"si Pierre habite Paris, alors Pierre prend le TGV"

nous sommes habitué à considérer que la signification de cette phrase vient d'une fonction de vérité qui, aux valeurs de vérité de '*Pierre habite Paris*' et '*Pierre prend le TGV*' associe la valeur de vérité de la phrase prise dans son ensemble. La substitution d'une autre proposition à '*Pierre habite Paris*', ou d'une autre proposition à '*Pierre prend le TGV*' est ainsi susceptible de modifier la valeur de vérité de la phrase. La valeur de vérité d'une proposition formée à partir d'un connecteur binaire et de deux propositions élémentaires est donc bien une 'fonction à deux variables': de $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ dans $\{0, 1\}$. On dit plus justement: 'à deux places', ou 'à deux arguments'. (*Un argument est une place pour une variable dans l'expression d'une fonction*).

Mais si, maintenant, nous substituons, non plus une proposition, mais: *un terme* à '*Pierre*' dans '*Pierre habite Paris*' ou dans '*Pierre prend le TGV*', nous avons une nouvelle source de variabilité. Selon la dénotation du terme en question dans un ensemble préalablement délimité, la proposition deviendra vraie ou fausse. Soit par exemple: E un ensemble d'individus: {*Pierre, Julie, Paul, Lucien, Anne*} tel que: *Paul, Anne habitent Lyon* et *Pierre, Julie, Lucien habitent Paris*: '*Pierre habite Paris*' est vraie, ainsi que '*Julie habite Paris*', mais pas '*Paul habite Paris*'.

Autrement dit, nous pouvons considérer un prédicat à une place comme une **fonction**, définie dans un ensemble (appelé *univers*) et à valeurs dans $\{0, 1\}$. Ici, nous pouvons définir le prédicat 'habite_Paris' comme la fonction:

$$H_p: E \rightarrow \{0, 1\}$$

telle que:

$$H_p(x) = 1 \text{ si } x = \text{Pierre, Julie ou Lucien} \\ = 0 \text{ sinon}$$

Définition: On appelle *fonction propositionnelle* une application à valeurs dans $\{0, 1\}$.

¹Platon fut le premier, semble-t-il, à avoir réfléchi à la chose (*Cratyle*, 399 B). Il introduisit en effet la division fondamentale de la phrase grecque en composant nominal et composant verbal, '*onoma* et '*rhema*. Comme d'habitude (!), c'est Aristote qui systématisa cette distinction (*De l'interprétation*).

Un *prédicat* est un signe qui dénote une fonction propositionnelle.

1.2. Prédicats à plusieurs variables

Introduisons dans notre exemple une autre source de variabilité: les individus peuvent habiter *Lyon* ou *Paris*... Alors, on peut avoir évidemment les phrases:

Paul habite Lyon,

Pierre habite Lyon,

...

Autrement dit, la partie verbale elle-même peut être analysée. La constante 'habite' est utilisée pour dénoter une relation entre des individus et des villes. Nous pouvons donc lui associer aussi une fonction h :

$$h: E \times V \rightarrow \{0, 1\}$$

où E est l'ensemble des individus et V celui des villes (admettons: $V = \{\text{Paris}, \text{Lyon}\}$). En admettant la même situation que précédemment, nous avons:

$$h(x, y) = 1$$

$$\text{si } (x=\text{Paul ou Anne et } y=\text{Lyon}) \text{ ou } (x=\text{Pierre, Julie ou Lucien et } y=\text{Grenoble}), \\ = 0 \text{ sinon}$$

Cette fois, h est une fonction à deux arguments, l'un de type "personne" et l'autre de type "ville".

On peut évidemment concevoir des prédicats avec autant de places qu'on veut. Par exemple: '*_est assis entre_ et _*' définit un prédicat **ternaire**.

Les verbes usuels de la langue sont représentables sémantiquement par des prédicats unaires, binaires ou ternaires. Par exemple, un verbe intransitif comme *dormir* ou *avoir faim* est unaire, un verbe transitif comme *regarder* ou *imaginer* est binaire, un verbe ditransitif comme *donner* est ternaire. Certains verbes peuvent être tantôt unaires tantôt binaires, par exemple *chanter*, *manger* peuvent apparaître avec deux arguments (*Pierre mange une pomme*, *Marie chante une chanson*) ou bien avec un seul (*Pierre mange*, *Marie chante*).

On appelle *arité* le nombre d'arguments d'un prédicat.

2. Le langage de la logique des prédicats du premier ordre

2.1. Constantes, prédicats et variables individuelles

Le langage de la logique des prédicats du premier ordre contient plusieurs types de signes:

- des **constantes**, par exemple des noms propres (pierre, marie, paul, lucien...),
- des **lettres de prédicats** de diverses arités (A_1 , B_2 , C_n , etc.)

qui permettent d'écrire des expressions comme : $A(\text{pierre})$, $B(\text{pierre}, \text{marie})$ etc. Par exemple, si $B = \text{regarder}$, $B(\text{pierre}, \text{marie})$ sera l'expression logique associée à la phrase *pierre regarde marie*. On aura : $B(\text{pierre}, \text{marie}) = 1$ si la proposition *pierre regarde marie* est vraie, $= 0$ sinon.

En plus de ces symboles, nous allons introduire des **variables**, dites « variables individuelles » parce qu'elles sont destinées à ne prendre pour valeurs que *des éléments* d'un ensemble particulier que nous considérerons comme *l'univers de discours*. Ces éléments seront appelés des *individus*. Autrement dit, il n'y aura pas de variable prenant pour valeurs autre chose que de tels individus, par exemple il n'y aura pas de variable prenant pour valeurs *des ensembles* d'individus, ni de variables prenant pour valeurs *des relations* entre individus. C'est en raison de cette limitation qu'on parle de logique *du premier ordre*. Une logique des prédicats qui accepterait des variables pouvant prendre pour valeurs des ensembles d'individus (au lieu de simples individus) serait dite *du second*

ordre. Ces variables nous permettent d'avoir des expressions comme : $A(x)$, $B(x, y)$, $B(x, \text{marie})$ etc. Une expression comme $B(x, \text{marie})$ où $B = \text{regarde}$ peut être associée à une phrase comme *il (ou elle) regarde marie*. Dans ce cas, on considère que la variable introduite dans l'expression a un statut analogue à un pronom : elle réfère à un individu, mais on ne sait pas lequel. Dans un tel cas, on dit que la variable x est *libre* dans l'expression. Une expression qui a une variable libre a une valeur de vérité qui varie en fonction de la valeur prise par cette variable.

2.2. Quantificateurs

Mais la logique des prédicats nous donne une autre manière d'utiliser les variables. Supposons que nous voulions dire que *quelqu'un regarde marie*, alors cette phrase se traduit par l'idée *qu'il existe une certaine valeur de x telle que $B(x, \text{marie})$ soit vrai*. Cette expression n'a plus une valeur de vérité variable (variant en fonction d'une valeur attribuée à x), elle est soit vraie, soit fausse. Elle est vraie s'il existe une valeur de x pour laquelle $B(x, \text{marie}) = 1$ et elle est fausse sinon. Symboliquement, nous écrivons :

$$(\exists x)B(x, \text{marie})$$

Dans cette expression, la variable x n'est plus libre, on dit qu'elle est liée par le quantificateur « $\exists$ ».

Maintenant, si nous voulons exprimer l'idée que tout étudiant de linguistique est amoureux de Marie, nous commencerons par exprimer le fait général que si un individu représenté par une variable x est étudiant de linguistique, alors l'individu représenté par la même variable est amoureux de Marie :

$$\text{etudiant_de_linguistique}(x) \Rightarrow \text{est_amoureux}(x, \text{marie})$$

Mais une telle expression traduit plutôt « s'il est étudiant de linguistique alors il est amoureux de Marie », mais qui est ce « il » ? de qui parlons-nous ? en réalité de personne à proprement parler, ou plutôt de tout le monde puisque nous énonçons une généralité. Dans la phrase *tout étudiant de linguistique est amoureux de Marie*, il n'y a pas de référence à un individu particulier. N'importe quel individu peut être la valeur de x . Nous exprimerons donc cela par un autre quantificateur :

$$(\forall x) (\text{etudiant_de_linguistique}(x) \Rightarrow \text{est_amoureux}(x, \text{marie}))$$

Là aussi, la variable x est liée. On peut bien sûr combiner les quantificateurs. Comment exprimer que *tous les étudiants de linguistique ont emprunté un livre de sémantique* ?

Si nous supposons que chaque étudiant a choisi un livre de sémantique, la traduction sera :

$$(\forall x)(\text{etudiant}(x) \Rightarrow (\exists y) (\text{livre_de_sémantique}(y) \wedge a_emprunté(x, y)))$$

Si au contraire nous supposons qu'un livre a été imposé et que chaque étudiant a du l'emprunté (par exemple à tour de rôle), alors la traduction sera :

$$(\exists y) (\text{livre_de_sémantique}(y) \wedge ((\forall x) \text{etudiant}(x) \Rightarrow a_emprunté(x, y)))$$

Comme on le voit, entre ces deux formules, l'ordre des quantificateurs a changé. Dans la première, on dira que le « $\exists$ » est dans la portée de « $\forall$ », alors que dans la seconde c'est le contraire. Cela se traduit par le fait que dans la première, le y qui existe dépend de x , alors que dans la seconde, il n'en dépend pas.

Donnons maintenant des définitions précises de ces notions.

3. Définition d'un langage prédictif

3.1. Définition récursive

Définition: Un *langage prédictif* est défini par la donnée de :

- lettres de variables individuelles (ex: x, y, z),

- lettres de constantes individuelles (ex: a, b, c, ...),
- lettres de constantes prédicatives munies de leur arité (ex: $A_{/1}$, $B_{/2}$, $C_{/2}$, ...)

On rajoutera plus tard une quatrième espèce: les *foncteurs*, qui serviront à fabriquer des termes composés. Pour l'instant, nous appelons *terme* toute variable ou toute constante individuelle.

Les langages prédicatifs admettent également toutes les constantes logiques ordinaires, déjà vues en logique propositionnelle: $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\Rightarrow$. Et ils admettent en plus deux nouveaux symboles constants: $\forall$ et $\exists$.

Les règles de formation communes à tous les langages prédicatifs sont :

a) *formules atomiques*:

- si $P_{/n}$ est une lettre de prédicat d'arité n et si $t_1, \dots, t_n$ sont des termes, alors:

$P_{/n}(t_1, \dots, t_n)$ est une formule atomique.

b) *formules*:

- toute formule atomique est une formule,
- si A et B sont des formules, alors sont aussi des formules :

$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $\neg(A)$, $(A \Leftrightarrow B)$

- si A est une formule et x une variable individuelle, alors $(\forall x)A$ et $(\exists x)A$ sont aussi des formules, que l'on dit quantifiées. $\forall$ et $\exists$ sont appelés **quantificateurs** ($\forall$: quantificateur *universel*, qui se lit "**pour tout**", $\exists$: quantificateur *existentiel*, qui se lit: "**il existe**")².

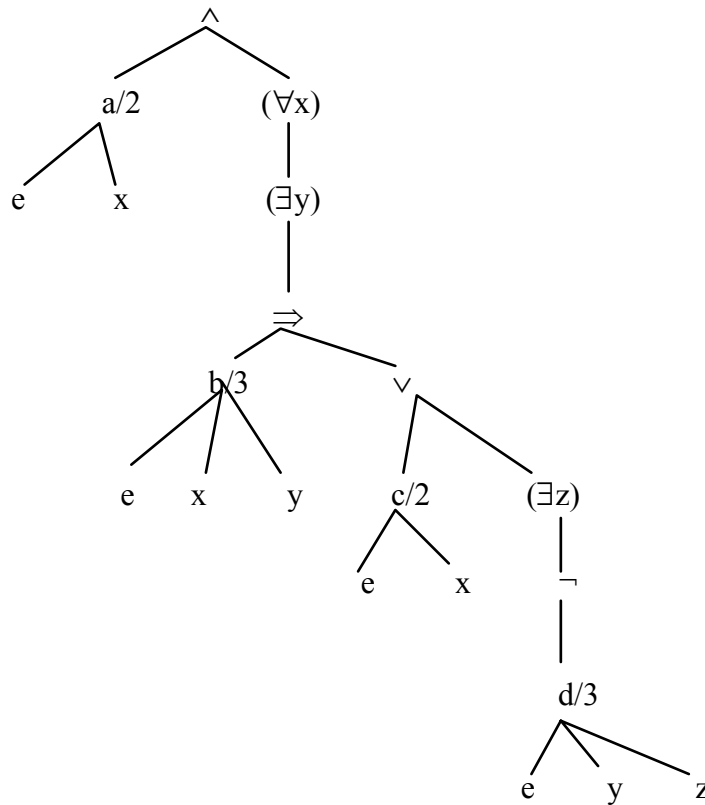
3.2. Arbre des sous-formules

Grâce à cette définition récursive, on peut associer à toute formule *un arbre*, qu'on appelle *arbre des sous-formules*. Par exemple, soit la formule: (où e et f sont supposées être des constantes individuelles)

$(A_{/2}(e, x) \wedge (\forall x)(\exists y)(B_{/3}(e, x, y) \Rightarrow (C_{/2}(e, x) \vee (\exists z) \neg D_{/3}(e, y, z))))$

on peut la représenter par l'arbre:

² Comme on le voit, la quantification ne porte que sur des variables individuelles. C'est en cela que ce calcul est désigné comme calcul des prédicats **du premier ordre**. On a en général besoin en mathématiques (et semble-t-il aussi dans le traitement des langues naturelles) d'une quantification d'ordre supérieur, c'est-à-dire qui porte sur des objets d'ordre supérieur aux individus, par exemple des ensembles ou bien des prédicats. Cela complique beaucoup les problèmes.



Les nœuds d'un tel arbre peuvent être numérotés de la façon suivante: le nœud racine est étiqueté par la suite vide $\langle \rangle$ et chaque nœud reçoit pour étiquette une suite de n chiffres de sorte que la suite des $n-1$ premiers indique le nœud dont il descend et le dernier son rang dans l'ordre gauche-droite parmi tous ceux qui ont le même nœud-père. Ainsi les nœuds de l'arbre de la figure ci-dessus reçoivent comme numéros successivement : $\langle \rangle$, 1, 2, 11, 12, 21, 211, 2111, 2112, 21111, 21112, 21113 etc. On constate que le premier e reçoit l'étiquette: 11, le deuxième : 21111 et le troisième : 211211. On dira que e possède trois *occurrences* dans cette formule, désignées respectivement par: 11, 21111 et 211211.

3.3. Portée d'un quantificateur

Définition [portée d'un quantificateur]: étant donnée une formule A contenant un quantificateur $(Q\xi)$, où ξ est une variable, on appelle **portée** de ce quantificateur toute la sous-formule dominée par $(Q\xi)$ dans l'arbre des sous-formules de A .

Occurrence d'une variable : toute formule peut donner lieu à une analyse arborescente. On peut alors repérer chaque nœud de l'arbre par un numéro d'ordre (cf. procédure ci-dessus) qu'on appelle aussi son adresse. Une occurrence d'une variable est l'adresse où elle apparaît.

Occurrence de variable liée: une occurrence de variable ζ sera dite *liée* si elle est dans la portée d'un quantificateur $(\forall\zeta)$ ou $(\exists\zeta)$.

Occurrence de variable libre: une occurrence de variable ζ est dite *libre* dans le cas contraire.

Exemple:

Dans la formule $(a/2(e, x) \wedge (\forall x)(\exists y)(b/3(e, x, y) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, y, z))))$ (1)
la première occurrence de x est libre, par contre les deux suivantes sont liées. Toutes les occurrences de z et de y sont liées.

Remarque importante: il est recommandé lorsque une même variable occure dans une formule tantôt libre tantôt liée de changer le nom soit de la variable libre, soit de la variable liée. La vérité d'une formule ne dépend pas du nom qu'on donne aux variables. Ainsi la formule précédente pourra s'écrire aussi bien :

$$(a/2(e, u) \wedge (\forall x)(\exists y)(b/3(e, x, y) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, y, z)))) \quad (2)$$

ou:

$$(a/2(e, x) \wedge (\forall u)(\exists y)(b/3(e, u, y) \Rightarrow (c/2(e, u) \vee (\exists z) \neg d/3(e, y, z)))) \quad (3)$$

Un tel changement de nom de variable a l'avantage de nous faire éviter toute confusion et de définir pour toute formule F deux ensembles disjoints:

Libre (F) = ensemble des variables libres dans F ,

Liée (F) = ensemble des variables liées dans F .

Définition : Une formule sera dite *close* si toutes les occurrences de variables qui y figurent sont liées. On parlera aussi dans ce cas de *proposition*.

Comme on le notera, ce n'est pas le cas de la formule (2) ci-dessus. En effet, dans (2), u est libre. (2) n'est donc pas une proposition (au sens où nous entendons par là une expression qui est soit vraie, soit fausse) car sa valeur de vérité dépendra de la valeur donnée à u .

3.4. Substitution d'un terme à une variable dans une expression prédicative

Etant donnée une formule prédicative ϕ contenant une variable libre ζ , et un terme τ , nous définirons le résultat de la *substitution* de τ à ζ dans ϕ comme l'expression obtenue quand toutes les occurrences de ζ ont été remplacées par des occurrences de τ . On notera $\phi[\tau/\zeta]$ le résultat de la substitution de τ à ζ dans ϕ . On peut écrire $\phi(\tau)$ à la place de $\phi[\tau/\zeta]$, à condition de se souvenir que les places occupées maintenant par τ étaient celles repérées par ζ . Cette précaution est évidemment fondamentale si ϕ est une expression contenant d'autres variables que ζ .

Exemples:

Considérons la formule:

$$(a/2(e, u) \wedge (\forall x)(b/3(e, x, y) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, y, z)))) \quad (4)$$

qui possède les variables libres u et y . Le résultat de la substitution de la constante k à y dans cette formule (opération que nous noterons: $[k/y]$) sera:

$$(a/2(e, u) \wedge (\forall x)(b/3(e, x, k) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, k, z)))) \quad (5)$$

Le résultat de la substitution de la variable v à y dans cette formule sera:

$$(a/2(e, u) \wedge (\forall x)(b/3(e, x, v) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, v, z)))) \quad (6)$$

De même le résultat de la substitution de x à y dans cette formule serait:

$$(a/2(e, u) \wedge (\forall x)(b/3(e, x, x) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, x, z)))) \quad (6')$$

mais comme on peut le voir aisément, il y a une différence "structurelle" entre (6) et (6'). Dans (6), la substitution de v à y *préserve les liens* de la formule: il n'y a pas de nouveau lien créé. Ce n'est pas le cas de (6') où par substitution de x à y , parce que les occurrences de y sont dans le champ d'un quantificateur portant sur x , immédiatement de nouveaux

liens sont créés, qui ne figuraient pas dans la formule originale. Il y a là quelque chose d'illicite, qui se comprend bien si nous considérons seulement le deuxième conjoint de la formule: $(\forall x)(b/3(e, x, y) \Rightarrow (c/2(e, x) \vee (\exists z) \neg d/3(e, y, z)))$. En effet, la formule originale serait une fonction propositionnelle alors que la formule à laquelle on arriverait par simple substitution serait une formule close (une proposition). Nous éviterons ce type de situation en restreignant les substitutions d'un terme τ à une variable ζ aux cas où τ est libre pour ζ .

Définition : dans une expression $\phi(\zeta)$ (où x est une variable libre) on dira que le terme τ est *libre pour ζ* si la substitution de τ à ζ dans $\phi(\zeta)$ ne crée aucun lien supplémentaire par un quantificateur.

Exemple: dans $(\exists y) (x < y)$, z est libre pour x , mais y n'est pas libre pour x , car la substitution de y à x conduirait à: $(\exists y) (y < y)$. (Or, une théorie qui admettrait la première formule pour vraie de tout x par exemple, n'admettrait pas nécessairement la seconde pour vraie: voir ce qui se passe quand on interprète le signe "<" comme la relation d'ordre strict usuelle sur les réels). Dans $(\exists y) (x < y)$, il y a un seul lien: entre le quantificateur $(\exists y)$ et l'unique occurrence de la variable y . Dans $(\exists y) (y < y)$, il y a deux liens: entre le quantificateur et les deux occurrences de y .

Exercice:

soit le langage prédicatif suivant:

- var. individuelles : x, y, z
- const. individuelles : p, j, m
- prédicats : $c/2, e/2, f/1$

Montrer qu'on peut former les formules suivantes :

- $f(j)$
- $f(x)$
- $(\exists z)f(z)$
- $(\exists z)(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$,
- $\neg((\exists z)(\forall x)(f(x) \Rightarrow c(z, x)))$

Noter que dans cette liste, seule la deuxième formule a la particularité d'avoir une variable libre. Dans les autres formules, soit il n'y a pas de variable, soit elles sont toutes liées. Remarquer aussi que nos règles de formation n'interdisent pas une formule telle que :

- $(\forall x)(f(y) \Rightarrow e(j, y))$

où la variable y est libre et la variable x n'apparaît pas dans la portée du quantificateur $(\forall x)$. Cela s'interprétera plus tard comme une quantification vide. On pourrait aussi avoir par exemple :

- $(\forall x) f(j)$

Exercices

1. Traduire en logique des prédicats du premier ordre les phrases suivantes :

- *Il existe un nombre plus petit que tous les autres*
- *Il n'existe pas de nombre plus grand que tous les autres*
- *Tout nombre entier est tel qu'il en existe un strictement plus grand que lui*
- *Un étudiant a remis une copie à chaque professeur*
- *Tout étudiant a remis une copie à un professeur*
- *Tout volume cubique qui se trouve à gauche d'un cylindre est devant un tétraèdre*
- *Il y a quelqu'un qui est tel que toutes les personnes qui le connaissent l'apprécient*
- *Personne n'est tel que toute personne qui le connaît l'apprécie*

2. Faire l'analyse arborescente de la formule :

$$(1) \quad (\forall x)(\forall z)((\exists y)(A(x, y) \wedge A(y, z))) \Rightarrow B(x, z))$$

Est-ce une formule close ?

3. Mêmes questions avec :

$$(2) \quad (\forall x)((\exists y)(A(x, y) \wedge A(y, z)) \Rightarrow B(x, z))$$

4. Dans la formule (1) ci-dessus, peut-on substituer la variable w à la variable z ? Peut-on substituer la variable y à la variable z ?

Dans la formule ci-dessous :

$$(3) \quad (\forall x)(\forall z)((A(x, y) \wedge A(y, z)) \Rightarrow (\exists y)B(y, x, z))$$

Quelles sont les occurrences de variables libres, de variables liées ? Peut-on transformer cette formule de manière à ce que variables libres et variables liées forment deux ensembles bien séparés ?