

Devoir n°2 - corrigé

Exercice 1

Faire les réductions suivantes de lambda-termes :

$((\lambda x. \lambda y. \text{regarde}(y, x) \text{ pierre}) \text{ marie})$

$((\lambda x. \lambda y. \text{regarde}(y, x) \text{ pierre}) \text{ marie}) \rightarrow (\lambda y. \text{regarde}(y, \text{pierre}) \text{ marie}) \rightarrow$
 $\text{regarde}(\text{marie}, \text{pierre})$

$((\lambda P. \lambda x. \lambda y. P(y, x) \lambda u. \lambda v. \text{lire}(u, v)) \text{ les_Misérables}) \text{ pierre})$

$((\lambda P. \lambda x. \lambda y. P(y, x) \lambda u. \lambda v. \text{lire}(u, v)) \text{ les_Misérables}) \text{ pierre}) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. (\lambda u. \lambda v. \text{lire}(u, v) (y, x)) \text{ les_Misérables}) \text{ pierre}) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. \text{lire}(y, x) \text{ les_Misérables}) \text{ pierre}) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. \text{lire}(y, x) \text{ les_Misérables}) \text{ pierre}) \rightarrow (\lambda y. \text{lire}(y, \text{les_Misérables}) \text{ pierre}) \rightarrow \text{lire}(\text{pierre}, \text{les_Misérables})$

$((\lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x)) \lambda u. \text{livre}(u)) \lambda v. \text{blanc}(v))$

$((\lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x)) \lambda u. \text{livre}(u)) \lambda v. \text{blanc}(v)) \rightarrow (\lambda Q. \lambda x. (\lambda u. \text{livre}(u) (x) \wedge Q(x)) \lambda v. \text{blanc}(v)) \rightarrow \lambda x. (\lambda u. \text{livre}(u) (x) \wedge \lambda v. \text{blanc}(v) (x)) \rightarrow \lambda x. (\text{livre}(x) \wedge \text{blanc}(x))$

$((\lambda P. P \lambda u. \text{livre}(u)) \text{ les_Misérables})$

$((\lambda P. P \lambda u. \text{livre}(u)) \text{ les_Misérables}) \rightarrow (\lambda u. \text{livre}(u) \text{ les_Misérables}) \rightarrow \text{livre}(\text{les_Misérables})$

$(\lambda P. P(\text{les_Misérables}) \lambda x. \text{a_lu}(\text{pierre}, x))$

$(\lambda P. P(\text{les_Misérables}) \lambda x. \text{a_lu}(\text{pierre}, x)) \rightarrow \lambda x. \text{a_lu}(\text{pierre}, x) (\text{les_Misérables}) \rightarrow \text{a_lu}(\text{pierre}, \text{les_Misérables})$

Exercice 2

Quels sont les types sémantiques de :

$\lambda P. \lambda x. \lambda y. P(y, x)$ - où $P(y, x)$ est une formule, donc de type t –

$(e \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow (e \rightarrow t))$

$\lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x))$ - où P et Q sont des symboles de prédicat unaire –

$(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t))$

$\lambda P. P(\text{les_Misérables})$ - où P est un prédicat unaire –

$(e \rightarrow t) \rightarrow t$

Exercice 3

Réduire les suites de types associées aux phrases suivantes et en déduire leur représentation sémantique :

Marie dort

$\text{Marie} : e : \text{marie} \quad \text{dort} : e \rightarrow t : \lambda x. \text{dort}(x)$

$\text{Marie dort} : t : \text{dort}(\text{marie})$

Marie nourrit Minou

$\text{Marie} : e : \text{marie} \quad \text{nourrit} : e \rightarrow (e \rightarrow t) : \lambda y. \lambda x. \text{nourrit}(x, y) \quad \text{Minou} : e : \text{minou}$

$\text{nourrit Minou} : e \rightarrow t : \lambda x. \text{nourrit}(x, \text{minou})$

$\text{Marie nourrit Minou} : t : \text{nourrit}(\text{marie}, \text{minou})$

Marie nourrit Minou et affame Fido

Ici, le mot *et* doit avoir le type : $(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t))$ et le λ -terme associé est : $\lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x))$. On obtient :

$\text{Marie} : e : \text{marie}$

$\text{nourrit} : e \rightarrow (e \rightarrow t) : \lambda x. \lambda y. \text{nourrit}(y, x)$

$\text{Minou} : e : \text{minou}$

$\text{et} : (e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t)) : \lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x))$

$\text{affame} : e \rightarrow (e \rightarrow t) : \lambda u. \lambda v. \text{affame}(v, u)$

$\text{Fido} : e : \text{fido}$

d'où :

$\text{nourrit Minou} : e \rightarrow t : \lambda y. \text{nourrit}(y, \text{minou})$

$\text{affame Fido} : e \rightarrow t : \lambda v. \text{affame}(v, \text{fido})$

$\text{et affame Fido} : (e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t) : (\lambda P. \lambda Q. \lambda x. (P(x) \wedge Q(x)) \quad \lambda v. \text{affame}(v, \text{fido}))$, qui donne par réduction : $\lambda Q. \lambda x. (\lambda v. \text{affame}(v, \text{fido}))(x) \wedge Q(x) \rightarrow \lambda Q. \lambda x. (\text{affame}(x, \text{fido}) \wedge Q(x))$

$\text{nourrit Minou et affame Fido} : e \rightarrow t : (\lambda Q. \lambda x. (\text{affame}(x, \text{fido}) \wedge Q(x)) \quad \lambda y. \text{nourrit}(y, \text{minou})) \rightarrow \lambda x. (\text{affame}(x, \text{fido}) \wedge \lambda y. \text{nourrit}(y, \text{minou})(x)) \rightarrow \lambda x. (\text{affame}(x, \text{fido}) \wedge \text{nourrit}(x, \text{minou}))$

$\text{Marie nourrit Minou et affame Fido} : t : (\lambda x. (\text{affame}(x, \text{fido}) \wedge \text{nourrit}(x, \text{minou})) \quad \text{marie}) \rightarrow (\text{affame}(\text{marie}, \text{fido}) \wedge \text{nourrit}(\text{marie}, \text{minou}))$

NB : on aurait pu tout aussi bien faire d'abord « nourrit Minou et » puis « nourrit Minou et affame Fido »

Le chat jaune griffe Marie

Voir cours

Le chat griffe Marie cruellement

Le : $(e \rightarrow t) \rightarrow e : \lambda P. \lambda x. P(x)$

Chat : $e \rightarrow t : \lambda x. \text{chat}(x)$

Griffe : $e \rightarrow (e \rightarrow t) : \lambda u. \lambda v. \text{griffe}(v, u)$

Marie : $e : \text{marie}$

Cruellement : $(e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t) : \lambda P. \lambda z. \text{cruellement}(P(z))$

Le chat : $e : \lambda x. \text{chat}(x)$

griffe Marie : $e \rightarrow t : \lambda v. \text{griffe}(v, \text{marie})$

griffe Marie cruellement : $e \rightarrow t : \lambda z. \text{cruellement}(\text{griffe}(z, \text{marie}))$

le chat griffe Marie cruellement : $t : \text{cruellement}(\text{griffe}(\lambda x. \text{chat}(x), \text{marie}))$

Exercice 4

Soit j une constante de type e , M une constante de type $\langle e, t \rangle$, A une constante de type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$, x et y des variables de type e et Y une variable de type $\langle e, t \rangle$. Réduire le plus possible (par la β -réduction) les expressions suivantes :

a) $(\lambda x. M(x) \ j)$

$\rightarrow M(j)$

b) $(\lambda Y. Y(j) \ M)$

$\rightarrow M(j)$

c) $((\lambda x. \lambda Y. Y(x) \ j) \ M)$

$\rightarrow (\lambda Y. Y(j) \ M) \rightarrow M(j)$

d) $(\lambda x. (\forall y)((A \ x) \ y) \ j)$

$\rightarrow (\forall y)((A \ j) \ y)$

e) $(\lambda x. (\forall y)((A \ x) \ y) \ y)$ - quel problème apparaît ici ?

$\rightarrow (\forall y)((A \ y) \ y)$

Le problème qui apparaît ici est qu'on remplace x par la variable y qui apparaît déjà dans l'expression, ce qui crée une liaison (au moyen du quantificateur « $\forall y$ ») qui n'apparaissait pas au départ. Le « corps » du λ -terme est : $(\forall y)((A \ x) \ y)$ (ou, dans une notation équivalente : $(\forall y)A(y, x)$) autrement dit il contient une variable libre x . En remplaçant x par y , il n'y a plus de variable libre, toutes les variables deviennent liées. Mais il s'agit d'un artefact (c'est-à-dire d'un effet artificiel lié au mécanisme) car si on renommait les variables (ce qu'on a toujours le droit de faire), ce phénomène n'apparaîtrait pas. Or, on sait que $(\forall y)((A \ x) \ y)$ est équivalent par renommage à $(\forall z)((A \ x) \ z)$, et si on fait : $(\lambda x. (\forall z)((A \ x) \ z) \ y)$, on obtient $(\forall z)((A \ y) \ z)$, qui contient encore une variable libre : y .

Moralité : dans ce genre de cas, il faut préalablement renommer les variables pour éviter ce problème.

f) $(\lambda Y. (Y \ j) \ \lambda x. (M \ x))$

$\rightarrow (\lambda x. (M \ x) \ j) \rightarrow (M \ j)$