Corrigé du Devoir n°2

Démontrer que:

1. **M |=** `walked(John)`

Solution:

- Val(John) = a et Val(walked) = {a, b} or, Val(John) = a et Val(walked) = {a, b}

donc Val(John) $\in$ Val(walked) donc $[[\text{walked(John)}]]^{M} = 1$ d'où M |= `walked(John)`.

2. **M |= (∃x) (walked(x) ∧ talked(x))**

Solution :

La question ici est de savoir s'il existe une assignation d'une constante v à x telle que, sous cette assignation (qu'on notera [x ← v]), $[[(\text{walked}(x)\wedge\text{talked}(x))]]^{M} = 1$, ce qu'on notera $[[(\text{walked}(x)\wedge\text{talked}(x))]]^{M,[x\leftarrow v]} = 1$. Or la réponse est *oui*, puisqu'il suffit de choisir v = b. En ce cas, on obtient :

$[[(\text{walked}(x))]]^{M,[x\leftarrow b]} = 1$ puisque $[[x]]^{M,[x\leftarrow b]} = b \in$ Val(walked) = {a, b} et

$[[\text{talked}(x))]]^{M,[x\leftarrow b]} = 1$ puisque b $\in$ Val(talked) = {b} donc

$[[\text{walked}(x) \wedge \text{talked}(x)]]^{M,[x\leftarrow b]} = 1$.

3. **M |≠ (∀x)(∀y) saw(x, y)**

Solution:

Soit g l'assignation qui à x assigne a et à y assigne b. On a :

$[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g} = 0$ puisque $([[x]]^{M,g},[[y]]^{M,g}) = (a, b) \notin$ Val(saw), donc :

$[[(\forall x)(\forall y)\ \text{saw}(x, y)\ ]]^{M,h} = 0$ puisqu'il est faux que pour toute assignation g d'une valeur v à x et d'une valeur v' à y, on ait $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g} = 1$: g ci-dessus en est un contre-exemple.

4. **M |= (∀x)(∃y) saw(x, y)**

Solution :

Il faut passer en revue toutes les assignations possibles d'une valeur à x. On a :

a. **x := a** : alors soit g l'assignation qui à y assigne la valeur c (et à x la valeur a), on a : $([[x]]^{M,g},[[y]]^{M,g})=(a, c)\in$ Val(saw), donc $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g} = 1$, donc : $[[(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,[x \leftarrow a]} = 1$,

b. **x := b** : alors soit g' l'assignation qui à y assigne la valeur c (et à x la valeur b), on a : $([[x]]^{M,g'},[[y]]^{M,g'})=(b, c)\in$ Val(saw), donc $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g'} = 1$, donc $[[(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,[x \leftarrow b]} = 1$,

c. **x := c** : alors soit g'' l'assignation qui à y assigne la valeur b (et à x la valeur c),, on a : $([[x]]^{M,g''},[[y]]^{M,g''})=(c, b)\in$ Val(saw), donc $[[\text{saw}(x, y)]]^{M,g''} = 1$, donc $[[(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,[x \leftarrow c]} = 1$,

Donc, pour toute assignation d'une valeur v à x, on a : $[[(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M,[x \leftarrow v]} = 1$, donc $[[(\forall x)(\exists y)\ \text{saw}(x, y)]]^{M} = 1$ d'où M |= (∀x) (∃y) saw(x, y)

5. **M |≠ (∃x) (∀y) saw(y, x)**

Solution :

Cherchons là encore toutes les différentes assignations d'une valeur à x.

- **Soit x := a**, alors il existe une assignation de valeur v à y qui est telle que : $[[\text{saw}(y, x)]]^{M,[x \leftarrow a,\ y \leftarrow v]} = 0$, il suffit de prendre v = b, car (b, a) $\notin$ Val(saw), donc $[[(\forall y)\ \text{saw}(y, x)]]^{M,[x \leftarrow a,\ y \leftarrow b]} = 0$

- **Soit x := b**, alors il existe une assignation de valeur v' à y qui est telle que : $[[saw(y, x)]]^{M,[x \leftarrow b,\, y \leftarrow v']} = 0$, il suffit de prendre v' = a, (car $(a, b) \notin Val(saw)$), donc $[[(\forall y)\, saw(y, x)]]^{M,[x \leftarrow b,\, y \leftarrow a]} = 0$
- **Soit x := c**, alors il existe une assignation de valeur v'' à y qui est telle que : $[[saw(y, x)]]^{M,[x \leftarrow c,\, y \leftarrow v'']} = 0$, il suffit de prendre v'' = c (car $(c, c) \notin Val(saw)$), donc $[[(\forall y)\, saw(y, x)]]^{M,[x \leftarrow c,\, y \leftarrow c]} = 0$

Donc finalement, $[[(\exists x)(\forall y)\, saw(y, x)]]^{M,g} = 0$ (il n'existe aucune assignation g de valeur à x telle que $[[(\forall y)\, saw(y, x)]]^{M,g} = 1$).

2 - Exprimer par des formules de logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. **Exactement un étudiant a ri**

$(\exists x)((etudiant(x) \wedge a\_ri(x)) \wedge (\forall y)(((etudiant(y) \wedge a\_ri(y)) \Rightarrow (y = x)))$

2. **Tous les étudiants ont ri sauf un**

$(\exists y)(etudiant(y) \wedge (\forall x)((etudiant(x) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow a\_ri(x)) \wedge$
$((\forall x)((etudiant(x) \wedge \neg a\_ri(x)) \Rightarrow (x = y))))$

3. **Tous les étudiants ont lu une pièce de théatre**

$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(piece(y) \wedge a\_lu(x, y)))$ ou
$(\exists y)(piece(y) \wedge (\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow a\_lu(x, y)))$

4. **Tout étudiant aime sa mère**

On peut utiliser un foncteur mere, de sorte que mere(x) soit un terme. En ce cas :
$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow aime(x, mere(x)))$ ou
$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow aime(x, mere(y)))$
Sans foncteur :
$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(mere(y, x) \wedge aime(x, y)))$ ou
$(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(mere(y, z) \wedge aime(x, y)))$