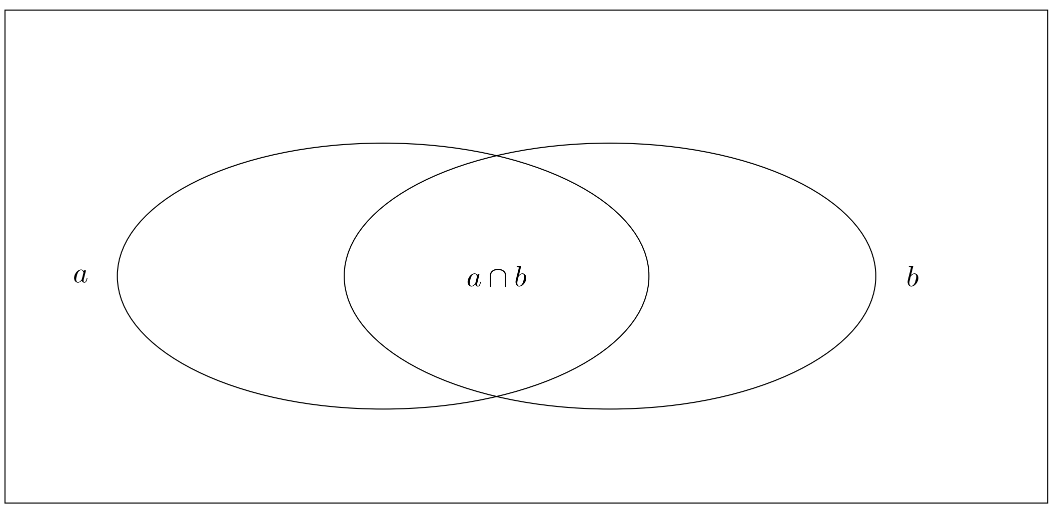
Logique des classes (logique booléenne) - diagrammes

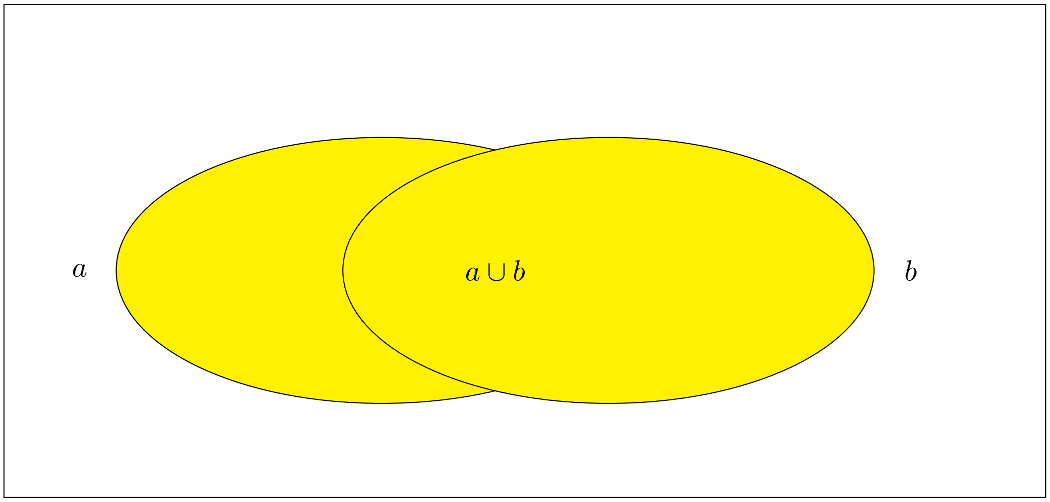
Alain Lecomte
L2 Sciences du Langage

1 Diagrammes de Venn

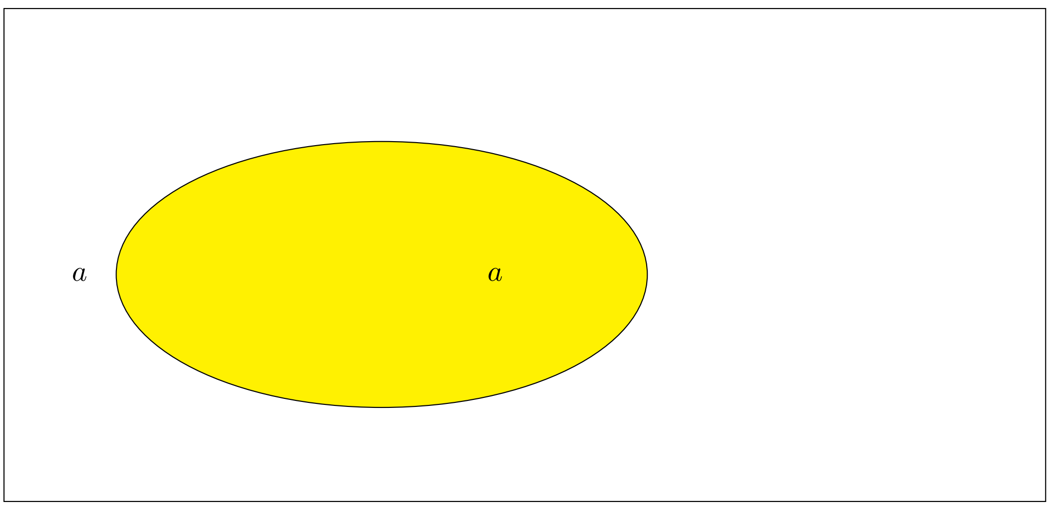
Les classes sont représentées par des régions du plan délimitées par des cercles ou des ovales. L'univers est représenté par un rectangle qui les contient toutes.
Soit a et b deux classes, on représente leur intersection, $a \cap b$ comme ci-dessous :



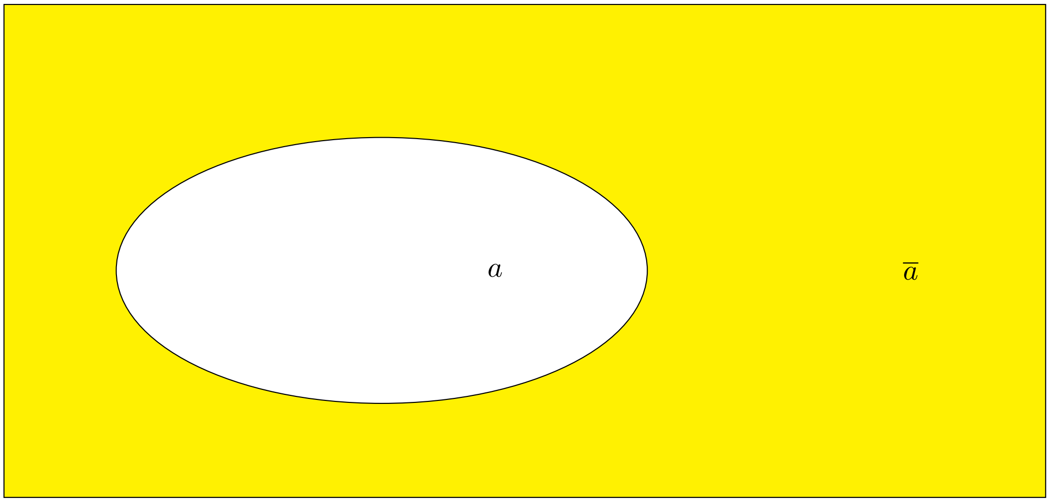
Leur union, $a \cup b$ par la partie en jaune dans la figure ci-dessous :



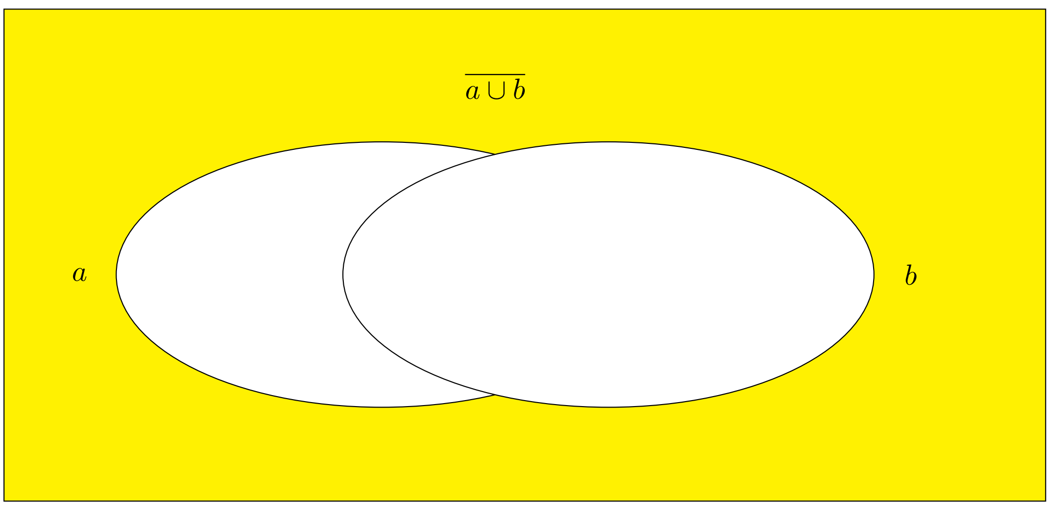
Soit a la classe en jaune ci-dessous :



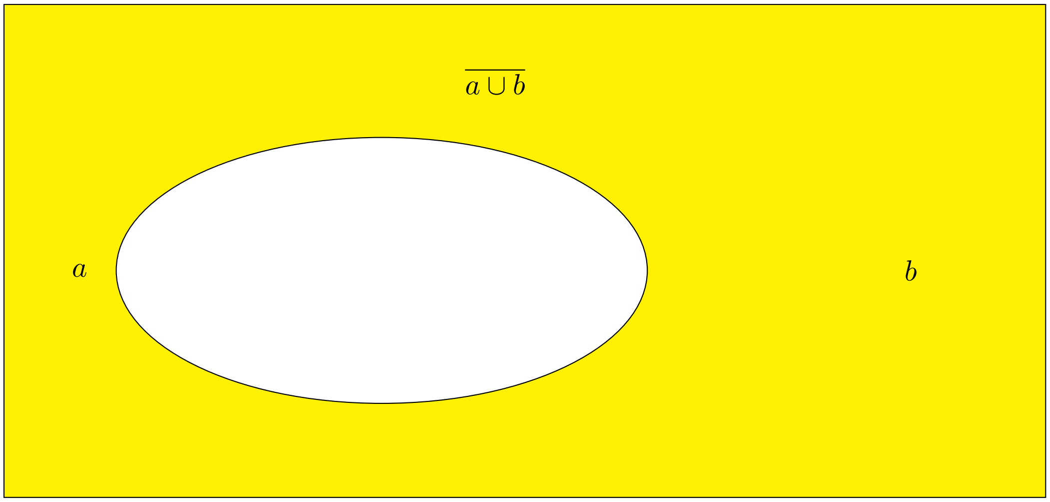
sa complémentaire, $\overline{a}$, est représentée par la partie en jaune ci-dessous :

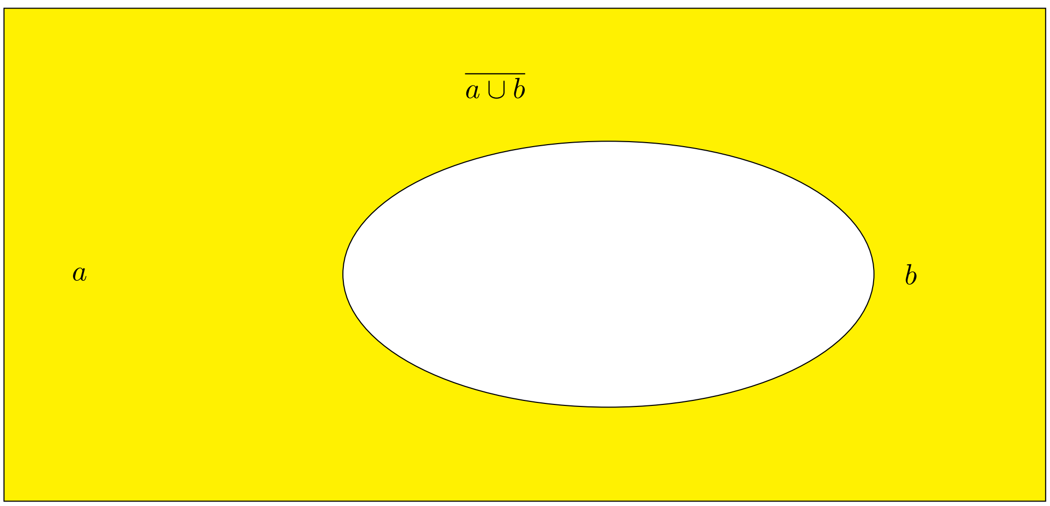


Noter alors que la classe complémentaire de $a \cup b$, c'est-à-dire la classe $\overline{a \cup b}$ est représentée par la partie en jaune ci-dessous :



qui est l'intersection des deux parties en jaune suivantes :

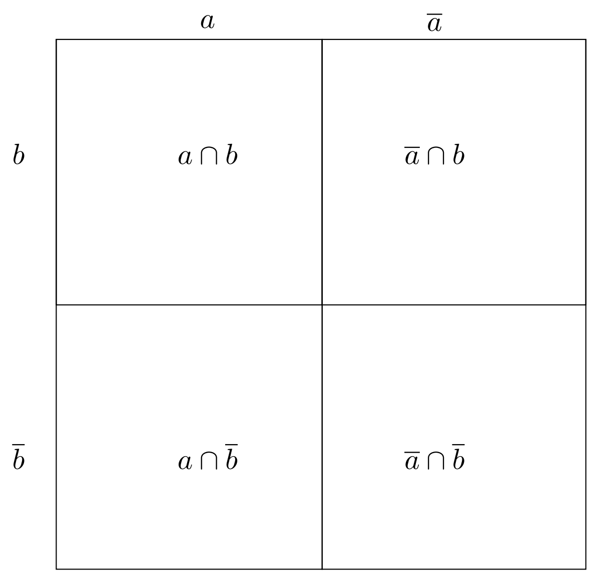




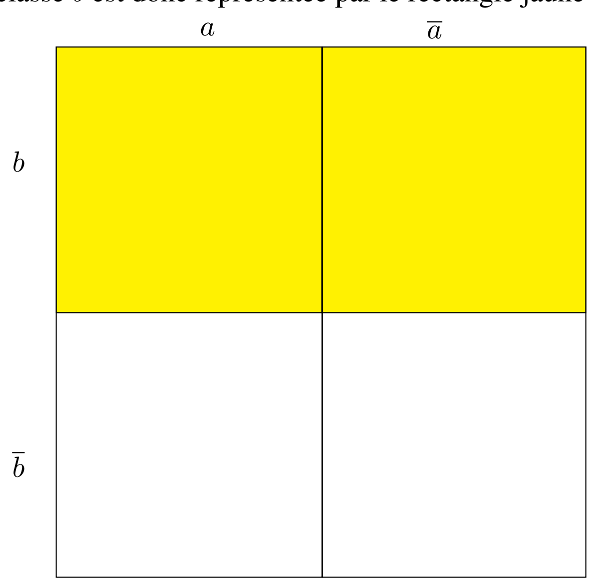
ce qui “montre” que $\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}$

2 Diagrammes de Lewis Carroll

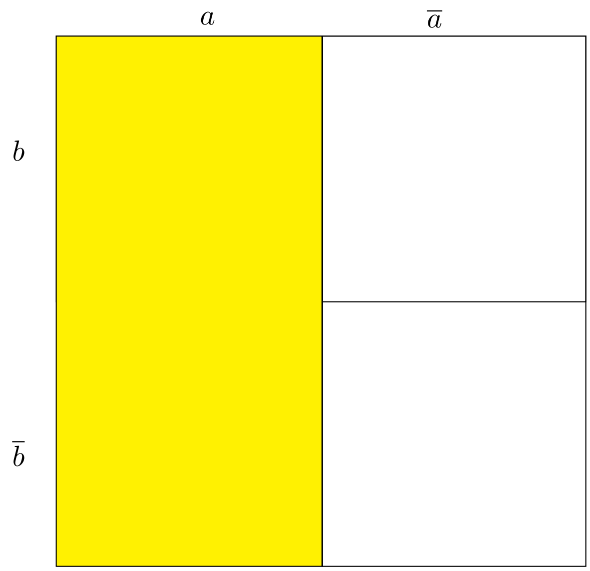
Etant donnée une classe a dans un univers $\mathcal{U}$, elle coupe l’univers en deux, une partie qui correspond à a et une autre qui correspond à $\overline{a}$ (les objets qui sont des a et les objets qui ne sont pas des a). On a évidemment : $a \cup \overline{a} = \mathcal{U}$ et $a \cap \overline{a} = \emptyset$.
Si on ajoute une deuxième classe, b, elle divise aussi l’univers en deux, mais maintenant, si on considère les deux classes en même temps, elles divisent l’univers en quatre : les objets qui sont a et b, les objets qui sont a mais pas b, les objets qui sont b mais pas a et les objets qui ne sont ni des a ni des b. Le diagramme suivant représente cette situation :



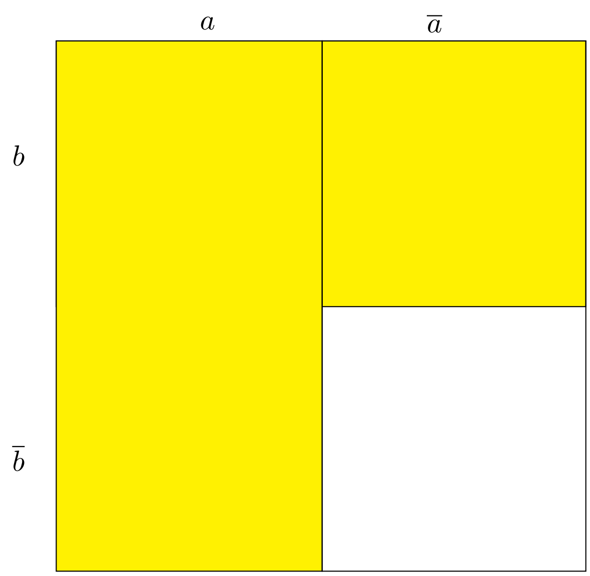
La classe b est donc représentée par le rectangle jaune suivant :



et la classe a par le suivant :

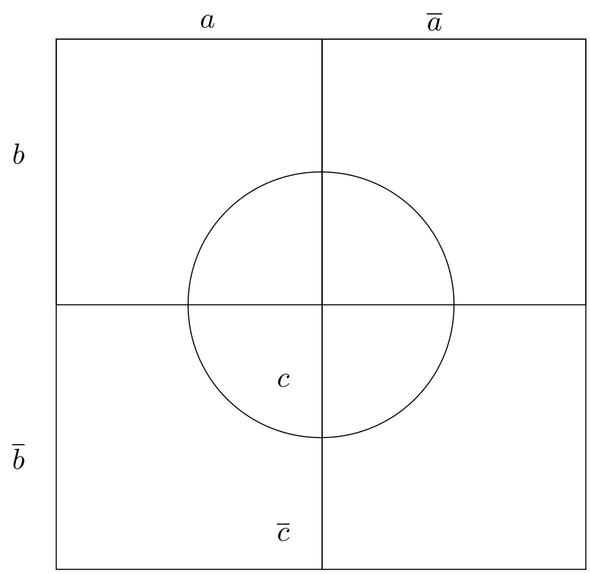


$a \cup b$ est donc l'union de ces deux rectangles, ce qui donne :

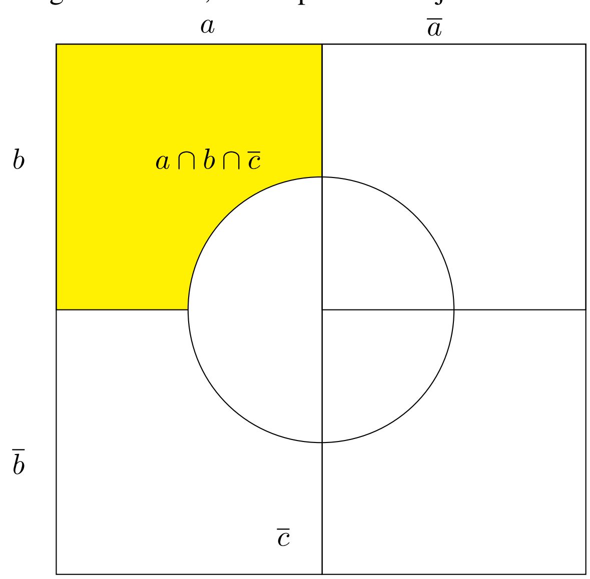


où on constate facilement que $\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}$ (le carré blanc qui reste).

Si on introduit maintenant une troisiÃÍme classe, c, on pourra la mettre au centre de la figure (ici un cercle) de sorte qu'on ait maintenant une division de l'univers en 8. L'intÃľrieur du cercle est c, son extÃľrieur est $\overline{c}$.

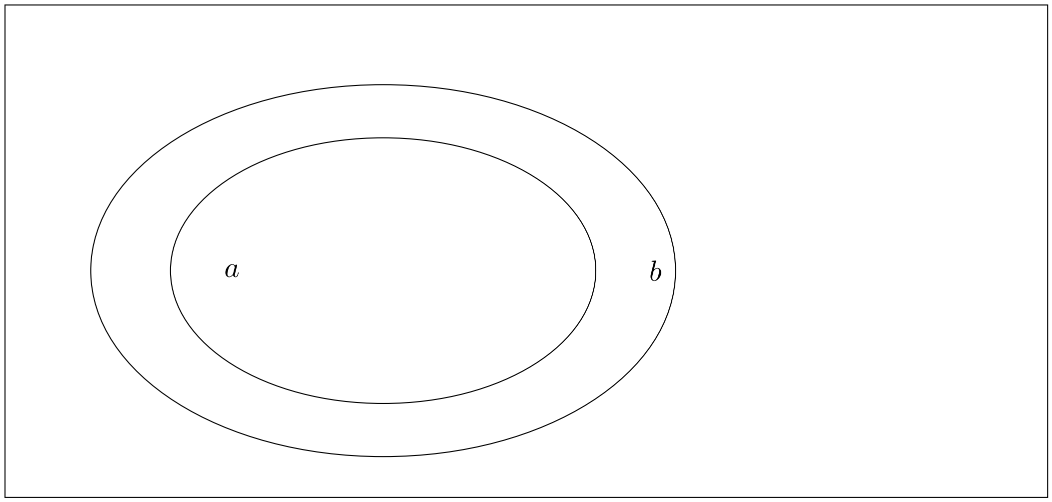


Sur la figure suivante, on a représenté en jaune la classe $a \cap b \cap \overline{c}$:



3 Inclusion

Il est facile de représenter l'inclusion grâce aux diagrammes de Venn. $a \subset b$ (a est inclus dans b) dans la figure suivante :



Pour représenter l'inclusion dans les diagrammes de Lewis carroll, on est obligé de passer par la propriété fondamentale :

$$a \subset b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \cap \overline{b} = \emptyset$$

(dire que a est inclus dans b, c'est dire que tous les a sont des b, autrement dit qu'il n'y a pas de a qui ne soient pas b !). D'où le diagramme :