

Exercices de logique

Fiche n°3 Calcul propositionnel (tables de vérité)

1- Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies**?

- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q))$
- $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r))$

2- Démontrer, sans tables de vérité¹, que : $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv q$

Soit V la constante "vrai" et F la constante "faux", vérifier également (sans tables de vérité)

- $p \Rightarrow F \equiv \neg p$
- $V \Rightarrow p \equiv p$

3- Donner la **négation** de l'expression suivante (sous une forme la plus simple possible):

$$(q \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

4 – Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

BROWN : *Jones est coupable et Smith est innocent.*

JONES : *si Brown est coupable, alors Smith aussi*

SMITH : *je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.*

Soit B, J, S les énoncés : « Brown est innocent », « Jones est innocent », « Smith est innocent ».

Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique. Calculer les valeurs de vérité des trois formules obtenues, puis répondre aux questions suivantes :

- (a) – les témoignages sont-ils compatibles ?
- (b) – quel témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre ?
- (c) – en supposant que tous sont innocents, lequel aurait produit un faux serment ?
- (d) - en supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai qui est innocent, qui est coupable ?
- (e) – en supposant que l'innocent a dit la vérité et que le coupable a menti, qui est innocent et qui est coupable ?

5 – Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un **chant obscène** et un **rire sardonique**, dont on peut cependant influencer le comportement en **jouant de l'orgue** ou en **brûlant de l'encens**.

a – compte-tenu des données suivantes :

¹ c'est-à-dire par exemple en utilisant des lois bien connues de la logique propositionnelle (associativité, commutativité, distributivité, absorption etc.)

- (i) le chant ne se fait pas entendre, à moins que l'on joue de l'orgue sans que le rire se fasse entendre
- (ii) si on brûle de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
- (iii) (en ce moment) le chant se fait entendre et le rire est silencieux.
Peut-on en conclure que :
- (iv) (en ce moment) on joue de l'orgue et on ne brûle pas d'encens ?

b- on remplace la proposition (ii) par :

- (ii') si on brûle de l'encens, le rire ne se fait entendre que si le chant est silencieux.

La proposition (iv) est-elle compatible avec (i), (ii'), (iii) ? est-elle déductible de (i), (ii'), (iii) ?

6- On introduit le symbole " $|$ ": barre de Scheffer ou encore "barre d'incompatibilité" en définissant: $p | q$ par: **p et q sont incompatibles (p et q ne peuvent pas être vraies en même temps)**. Donner sa table de vérité? Démontrer que ce connecteur suffit à définir tous les autres.

7 - Montrer que tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables à partir des seuls connecteurs: $\Rightarrow$ et $\neg$.

8- Quelles sont les assignations de valeurs de vérité aux lettres propositionnelles $p_1, \dots, p_n$ qui satisfont:

- a) la formule $F = ((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n))$?
- b) la formule $G = (F \wedge (p_n \Rightarrow p_1))$?