Exercices de logique

<u>Fiche n°4</u> Conséquence logique et règles d'inférence

1 – Montrer que les déductions suivantes sont valides et qu'on peut donc utiliser ces relations entre ensembles de formules et formules comme étant des règles d'inférence.

$\{A \Rightarrow B , B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$	(syllogisme)
$\{A \Rightarrow B\} \models (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$[1]	
$\{A , B\} \models A \wedge B$	(introduction de $\wedge$)
$\{A \wedge B\} \models A$	(élimination de $\wedge$)
$\{A \Rightarrow B\} \models ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$[2]	
$\{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D\} \models (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D)$	
$\{A\} \models A \vee B$	(introduction de $\vee$)
$\{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\} \models C$	(élimination de $\vee$–1)
$\{A \vee B, \neg A\} \models B$	(élimination de $\vee$–2)
$\{A \vee B, \neg B\} \models A$	(élimination de $\vee$–3)
$\{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D\} \models (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	
$\{A\} \models (B \Rightarrow A)$	
$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) , A \Rightarrow B\} \models (A \Rightarrow C)$	
$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\} \models (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	
$\{A\} \models ((\neg A) \Rightarrow B)$	(loi de Duns Scot[3])
$\{\neg A \Rightarrow A\} \models A$	(loi de Clavius)
$\{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\} \models A$	(règle de l'absurde)

2- Prouver (théorème de la déduction) :

si $\Gamma \cup \{A\} \models B$ alors $\Gamma \models (A \Rightarrow B)$

Noter que cela revient à dire : pour démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de :

(i) faire l'hypothèse A

(ii) en déduire alors B

3 - Montrer (en utilisant des résultats de (1) et (2) ci-dessus) la validité des déductions suivantes :

$\{\neg(A\wedge\neg B), \neg B\vee C, \neg C\} \models \neg A$

$\{(A\Rightarrow B) \wedge(A\Rightarrow C), \neg(B\wedge C), D\vee A\} \models D$

$\{\neg A\Rightarrow(C\vee D), (B\vee E)\Rightarrow\neg A, B\vee E\} \models C\vee D$

$\{C\Rightarrow\neg B, C\vee D, D\Rightarrow\neg B, A\Rightarrow B\} \models \neg A$

$\{D\Rightarrow\neg B, D\vee C, \neg C, \neg C\Leftrightarrow B\} \models \neg A$

4- Le raisonnement suivant (Origène, IIIème siècle après JC) est-il correct :

si tu sais que *tu es mort*, alors tu es mort
si *tu sais* que tu es mort, alors tu n'es pas mort
DONC :
tu ne sais pas que tu es mort

---

[1] Selon Guillaume d'Occam (XIVème siècle) : *quidquid sequitur ad consequens, sequitur ad antecedens* (tout ce qui découle du conséquent découle de l'antécédent)

[2] *quidquid stat cum antecedente, stat cum consequente* (tout ce qui se trouve avec l'antécédent se trouve avec le conséquent)

[3] *Ad impossibile sequitur quodlibet…* (d'une impossibilité découle ce que l'on veut !)

5- Analyser la validité des arguments suivants:
" Si la paix survient, alors il y aura une crise économique à moins que le pays se dote d'armes nouvelles ou bien exécute un large programme d'investissement intérieur dans les secteurs de l'enseignement, de la santé et de la lutte contre la pauvreté. Il n'est pas possible de se mettre d'accord sur les objectifs que peut se donner un large programme d'investissement intérieur. Donc si la paix survient et qu'il n'y a pas de crise économique le pays doit se doter d'armes nouvelles."
" A moins que nous continuions la politique de soutien des prix, nous perdrons les voix des agriculteurs. Si nous continuons cette politique, la surproduction continuera, sauf si nous contingentons la production. Sans les voix des agriculteurs, nous ne serons pas réélus. Donc si nous sommes réélus et si nous ne contingentons pas la production, il continuera d'y avoir surproduction ."

6- Dire si les ensembles suivants sont contradictoires ou satisfaisables :

$\{(p\vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s), p\vee r, q, p \Rightarrow r, \neg s\}$

$\{p\vee q, (r \Rightarrow s) \Rightarrow p, (q\vee\neg r) \Rightarrow (\neg p\wedge q), r, s \Rightarrow \neg q, \neg s \Rightarrow \neg p\wedge q\wedge r\}$

7- Mettre sous forme normale conjonctive :

$\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(r\wedge s))$

$((\neg(p\Leftrightarrow q) \vee (q\wedge r)) \Rightarrow p)$

8- *L'avion partira seulement si la piste est dégagée. La piste ne sera pas dégagée ou la grève sera terminée. La grève continue si et seulement si les revendications ne sont pas satisfaites*.
• Peut-on en déduire : *l'avion ne partira pas ou les revendications seront satisfaites*?
Expliquer comment et pourquoi.
• Peut-on en déduire : *si l'avion part, les revendications sont satisfaites*?
• Peut-on déduire : *l'avion ne part que si les revendications sont satisfaites*?

9- a) Démontrer que, pour tout ensemble X, Ø est inclus dans X, en utilisant l'une des règles de l’exercice 2.
b) Démontrer de façon similaire, que:

- il n’y a qu’un seul ensemble vide
- $Ø \cap A = Ø$
- $Ø \times A = Ø$

c) Démontrer qu'il existe exactement 1 graphe de fonction bijective sur l'ensemble Ø x Ø.
Si A n'est pas vide, combien de graphes de fonctions injectives, bijectives sur : Ø x A ?
A x Ø ?

10- Un coffre-fort est muni de n serrures et peut être ouvert uniquement lorsque ces n serrures sont simultanément ouvertes. Cinq personnes: a, b, c, d, e doivent recevoir des clés correspondant à certaines de ces serrures. Chaque clé peut être disponible en autant d'exemplaires qu'on le souhaite. On demande de choisir pour l'entier n la plus petite valeur possible, et de lui associer une répartition de clés entre les cinq personnes de telle manière que le coffre puisse être ouvert si et seulement si on se trouve dans une au moins des situations suivantes:

• présence simultanée de a et b,
• présence simultanée de a, c et d
• présence simultanée de b, d et e.