

Exercices de logique

Fiche n°4 Conséquence logique et règles d'inférence

1 – Montrer que les déductions suivantes sont valides et qu'on peut donc utiliser ces relations entre ensembles de formules et formules comme étant des règles d'inférence.

$$\begin{aligned} \{A \Rightarrow B\} &\vdash ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C)) \\ \{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D\} &\vdash (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D) \\ \{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\} &\vdash C && \text{(élimination de } \vee\text{-1)} \\ \{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D\} &\vdash (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D) \\ \{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B\} &\vdash (A \Rightarrow C) \\ \{A\} &\vdash ((\neg A) \Rightarrow B) && \text{(loi de Duns Scot¹)} \\ \{\neg A \Rightarrow A\} &\vdash A && \text{(loi de Clavius)} \end{aligned}$$

2 - Montrer (en utilisant des résultats de (1) et (2) ci-dessus) la validité des déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \{\neg(A \wedge \neg B), \neg B \vee C, \neg C\} &\vdash \neg A \\ \{(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C), \neg(B \wedge C), D \vee A\} &\vdash D \\ \{D \Rightarrow \neg B, D \vee C, \neg C, \neg C \Leftrightarrow B\} &\vdash \neg A \end{aligned}$$

3- Analyser la validité de l'argument suivant:

" Si la paix survient, alors il y aura une crise économique à moins que le pays se dote d'armes nouvelles ou bien exécute un large programme d'investissement intérieur dans les secteurs de l'enseignement, de la santé et de la lutte contre la pauvreté. Il n'est pas possible de se mettre d'accord sur les objectifs que peut se donner un large programme d'investissement intérieur. Donc si la paix survient et qu'il n'y a pas de crise économique le pays doit se doter d'armes nouvelles."

4- Dire si l' ensemble suivant de formules est contradictoire ou satisfaisable :

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s), p \vee r, q, p \Rightarrow r, \neg s\}$$

5- Un coffre-fort est muni de n serrures et peut être ouvert uniquement lorsque ces n serrures sont simultanément ouvertes. Cinq personnes: a, b, c, d, e doivent recevoir des clés correspondant à certaines de ces serrures. Chaque clé peut être disponible en autant d'exemplaires qu'on le souhaite. On demande de choisir pour l'entier n la plus petite valeur possible, et de lui associer une répartition de clés entre les cinq personnes de telle manière que le coffre puisse être ouvert si et seulement si on se trouve dans une au moins des situations suivantes:

- présence simultanée de a et b,
- présence simultanée de a, c et d
- présence simultanée de b, d et e.

¹ *Ad impossibile sequitur quodlibet...* (d'une impossibilité découle ce que l'on veut !)