Quelques exercices corrigés sur la déduction naturelle

1- Démontrer que : $\{p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s)), \neg s\}$ |-- $(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$

Au départ, notre espace de déduction est le suivant :

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
.		
.		
.		
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

Les deux premières lignes sont occupées par les deux prémisses. La dernière (on ne sait évidemment pas encore ce que sera la valeur de n) est la conclusion *à laquelle on veut aboutir*. Pour remplir les lignes entre 2 et n, nous nous laissons guider par la formule à laquelle nous voulons aboutir, et par celles que nous avons déjà. Au stade actuel, la formule qui nous sert de but a la forme d'une implication (son connecteur principal est « $\Rightarrow$ »), donc nous sommes obligés d'utiliser la règle dite « introduction de $\Rightarrow$ ». Cette règle consiste :

1- à poser comme *hypothèse* l'antécédent de l'implication qu'on veut démontrer, ouvrant ainsi un nouvel espace (une « fiction ») à l'intérieur du précédent,
2- à tenter de déduire le conséquent de l'implication dans ce nouvel espace, avec le droit d'utiliser toutes les formules obtenues précédemment dans les espaces de déduction de niveau enchâssant.

D'où le nouvel état de notre espace de déduction :

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	│ $p \wedge \neg q$	hyp
.	│	
.	│ r	
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

A ce stade, nous avons simplifié notre travail. La formule à prouver est simplement r. Elle n'a pas de structure interne particulière qui pourrait nous aider à continuer. Donc, pour prouver r, nous allons maintenant nous laisser guider par la forme des formules déjà obtenues, c'est-à-dire pour l'instant les deux prémisses et l'hypothèse. Sachant que r est à prouver et que r ne figure que dans la prémisse 1, quelque chose nous dit (!) qu'on va devoir utiliser la formule qui se trouve à la ligne 1. Comme cette formule est une implication, nous allons cette fois utiliser une formule implicative pour démontrer autre chose (une telle formule n'est plus un *but*, elle est maintenant un *moyen*), donc nous utiliserons la règle dite « élimination de $\Rightarrow$ ». Mais pour cela, nous avons besoin de l'antécédent de cette formule, autrement dit p. Or comment avoir p ? grâce à l'hypothèse $p \wedge \neg q$. Donc, avant d'utiliser la règle d'élimination de $\Rightarrow$, il va falloir utiliser la règle d'élimination de $\wedge$. D'où le nouvel état de notre espace de déduction :

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
.		
.	$\quad r$	
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

On peut maintenant répéter le contenu de la ligne 1 dans la sous-déduction (règle reit), de manière à rendre clair le fait que, dans cette sous-déduction, on utilise la règle d'élimination de $\Rightarrow$ à partir de la prémisse 1 et du contenu de la ligne 4.

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
5	$\quad p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	reit, 1
6	$\quad \neg q \Leftrightarrow (r \vee s)$	e $\Rightarrow$, 4, 5
.		
.	$\quad r$	
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

Maintenant, toujours pour avancer, nous voyons que le r a prouver se trouve dans une formule plus simple qu'avant, celle qu'on a mise à la ligne 6. Or cette formule est une équivalence, donc il va falloir utiliser la règle d'élimination de $\Leftrightarrow$, mais avant cela, il nous faudra obtenir $\neg q$, et pour cela il faut encore procéder à une élimination de $\wedge$ à partir du contenu de la ligne 3.

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
5	$\quad p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	reit, 1
6	$\quad \neg q \Leftrightarrow (r \vee s)$	e $\Rightarrow$, 4, 5
7	$\quad \neg q$	e $\wedge$, 3
.		
.	$\quad r$	
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
5	$\quad p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	reit, 1
6	$\quad \neg q \Leftrightarrow (r \vee s)$	e $\Rightarrow$, 4, 5
7	$\quad \neg q$	e $\wedge$, 3

8	$\quad r \vee s$	e $\Leftrightarrow$, 6, 7
.		
.	$\quad r$	
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

A ce stade, la formule sur laquelle nous nous focalisons est la disjonction $r \vee s$, donc il faut utiliser une règle d'élimination du $\vee$. Etant donné ce dont nous disposons, nous utilisons la règle d'élimination du $\vee$ qui consiste à supprimer l'un des deux termes de l'alternative grâce à sa négation. Donc nous réitérons la prémisse 2 et nous l'appliquons pour obtenir le résultat.

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
5	$\quad p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	reit, 1
6	$\quad \neg q \Leftrightarrow (r \vee s)$	e $\Rightarrow$, 4, 5
7	$\quad \neg q$	e $\wedge$, 3
8	$\quad r \vee s$	e $\Leftrightarrow$, 6, 7
9	$\quad \neg s$	reit, 2
10	$\quad r$	e $\vee$, 8, 9
n	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	Conclusion

A ce stade, nous voyons que nous avons accompli notre programme : il s'agissait de prouver r à partir de l'hypothèse $p \wedge \neg q$: c'est fait ! Il nous reste à en tirer la conclusion : la formule $(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$ découle de la sous-déduction qui va de la ligne 3 à la ligne 10, par utilisation de la règle « introduction de $\Rightarrow$ ». D'où la déduction, une fois terminée :

1	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	Prémisse 1
2	$\neg s$	Prémisse 2
3	$\quad p \wedge \neg q$	hyp
4	$\quad p$	e $\wedge$, 3
5	$\quad p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow (r \vee s))$	reit, 1
6	$\quad \neg q \Leftrightarrow (r \vee s)$	e $\Rightarrow$, 4, 5
7	$\quad \neg q$	e $\wedge$, 3
8	$\quad r \vee s$	e $\Leftrightarrow$, 6, 7
9	$\quad \neg s$	reit, 2
10	$\quad r$	e $\vee$, 8, 9
11	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	i $\Rightarrow$, 3_10

2- Démontrer que : $\vdash p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m))$

Ici, on ne peut évidemment se laisser guider que par la conclusion à laquelle on veut aboutir puisqu'il n'y a pas de prémisses ! (en ce cas, on démontre un « théorème » du système). Il s'agit de prouver une implication, donc on utilise la règle d'introduction de $\Rightarrow$**.**

1	$\mid\ \mid\ p$	hyp
	$\mid\ \mid$	
	$\mid\ \mid\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m)$	
n	$\mid\ p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m))$	Conclusion

Comme la nouvelle formule à prouver est encore une implication, on récidive :

1	$\mid\ \mid\ p$	hyp 1
2	$\mid\ \mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	hyp 2
	$\mid\ \mid\ \mid$	
	$\mid\ \mid\ \mid\ (q \Rightarrow m) \Rightarrow m$	
	$\mid\ \mid\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m)$	
n	$\mid\ p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m))$	Conclusion

La nouvelle formule à prouver est encore une implication, d'où :

1	$\mid\ \mid\ p$	hyp 1
2	$\mid\ \mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	hyp 2
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ q \Rightarrow m$	hyp 3
	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid$	
	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ m$	
	$\mid\ \mid\ \mid\ (q \Rightarrow m) \Rightarrow m$	
	$\mid\ \mid\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m)$	
n	$\mid\ p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m))$	Conclusion

Il s'agit maintenant de prouver m à partir de toutes les formules introduites dans l'espace de déduction au-dessus et « à gauche » (au sens large) de la formule à prouver. Etant donné qu'il n'y a que des « $\Rightarrow$ », on ne va pouvoir utiliser que la règle d'élimination de $\Rightarrow$. D'où la déduction, à son état final :

1	$\mid\ \mid\ p$	hyp 1
2	$\mid\ \mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	hyp 2
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ q \Rightarrow m$	hyp 3
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	reit, 2
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p$	reit, 1
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ q$	e $\Rightarrow$ 4, 5
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ m$	e $\Rightarrow$ 3, 6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ (q \Rightarrow m) \Rightarrow m$	i $\Rightarrow$ 3_7
9	$\mid\ \mid\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m)$	i $\Rightarrow$ 2_8
n	$\mid\ p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow m) \Rightarrow m))$	i $\Rightarrow$ 1_9

3- Démontrer que : $\vdash (p \vee (q \wedge m)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee m))$

Attention : ici, après avoir introduit l'hypothèse correspondant à l'antécédent de l'implication, nous voyons que pour prouver le conséquent de l'implication, il faudra utiliser la règle d'introduction du $\wedge$, mais ***nous ne pourrons utiliser que l'hypothèse p $\vee$ (q $\wedge$ m)***, qui a la forme d'une formule en « $\vee$ », donc il faudra utiliser la règle d'élimination du $\vee$, qui consiste à se placer *tour à tour* sous l'hypothèse que c'est le premier terme qui est vrai, et sous l'hypothèse que c'est le second.

1	$p \vee (q \wedge m)$	hyp 1
2	p	hyp 2
3	$p \vee q$	i $\vee$, 2
4	$p \vee m$	i $\vee$, 2
5	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	i $\wedge$, 3, 4
6	$q \wedge m$	hyp 3
7	q	e $\wedge$, 6
8	m	e $\wedge$, 6
9	$p \vee q$	i $\vee$, 7
10	$p \vee m$	i $\vee$, 8
11	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	i $\wedge$, 9, 10
12	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	e $\vee$, 2_5, 6_11
13	$(p \vee (q \wedge m)) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$	i $\Rightarrow$, 1_12

4- Démontrer que : |-- $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$

Le conséquent de la formule à prouver est ici une négation, donc une fois que nous avons introduit l'antécédent comme hypothèse, il faut utiliser la règle d'introduction de la négation, laquelle consiste à poser comme hypothèse p et à essayer d'en déduire une formule et sa négation.

1	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$	hyp 1
2	p	hyp 2
3	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$	reit, 1
4	$p \Rightarrow q$	e $\wedge$, 1
5	$p \Rightarrow \neg q$	e $\wedge$, 1
6	q	e $\Rightarrow$, 2, 4
7	$\neg q$	e $\Rightarrow$, 2, 5
8	$\neg p$	i $\neg$, 2_7
9	$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$	i $\Rightarrow$, 1_8

5- Démontrer que : |-- $p \Rightarrow \neg\neg p$

1	p	hyp 1
2	$\neg p$	hyp 2
3	p	reit 1
4	$\neg p$	rep 2
5	$\neg\neg p$	i $\neg$, 2_4
6	$p \Rightarrow \neg\neg p$	i $\Rightarrow$, 1_5

6- Démontrer que : |-- $p \vee \neg p$ (loi du tiers exclu) (plus difficile !)

A priori, il faudrait utiliser la règle d'introduction du $\vee$. Mais pour utiliser cette règle, il faudrait que l'on ait démontré au préalable soit qu'on a p soit qu'on a $\neg$p… ce qui est impossible, donc il faut procéder par d'autres moyens. Si on n'a aucune règle logique « directe » qui nous permet d'aboutir, alors on tente le coup en niant la conclusion, et en introduisant cette négation comme hypothèse. En faisant cela, si nous arrivons à une contradiction, nous aurons démontré la négation de la négation au moyen de la règle d'introduction de $\neg$, et donc, grâce à la règle d'élimination de la double négation, nous aurons démontré la formule. C'est ce que nous faisons dans ce qui suit :

Premier pas :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	hyp 1

A ce stade, nous pourrions utiliser la règle d'élimination de $\neg$, mais il faudrait pour cela établir que nous avons aussi p $\vee\neg$p, ce qui est justement ce que nous cherchons ! donc, il faut là aussi « procéder par l'absurde » et supposer par exemple que nous avons p.
Deuxième pas :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	hyp 1
2	$\quad p$	hyp 2

Mais alors on peut prouver p $\vee\neg$p (par introduction de $\vee$), d'où :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	hyp 1
2	$\quad p$	hyp 2
3	$\quad p \vee \neg p$	i $\vee$, 2

Ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse 1. D'où la suite de la preuve :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	hyp 1
2	$\quad p$	hyp 2
3	$\quad p \vee \neg p$	i $\vee$, 2
4	$\quad \neg(p \vee \neg p)$	reit, 1
5	$\neg p$	i $\neg$, 2_4
6	$p \vee \neg p$	i $\vee$, 5
7	$\neg(p \vee \neg p)$	rep, 1
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	i $\neg$, 1_7
9	$p \vee \neg p$	e $\neg\neg$, 8

On remarquera que la règle d'élimination de la double négation était nécessaire pour prouver ce théorème. Il s'avère que, de la même façon, dans un système où le principe du tiers-exclu serait donné, mais pas la règle d'élimination de la double négation, on pourrait démontrer cette dernière. Autrement dit tiers exclu et double négation sont équivalentes. Un système qui ne possèderait ni l'une ni l'autre ne serait pas complet par rapport à la logique classique, il définirait une logique plus faible, qu'on appelle la logique intuitionniste.

7- Démontrer que : |-- $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

1	$\mid\ \mid\ \neg p \vee q$	hyp 1
2	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	hyp 2
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p \vee q$	reit, 1
4	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	e $\vee$, 2, 3
5	$\mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	i $\Rightarrow$, 2_4

8- Démontrer que : |-- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

1	$\mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	hyp 1
2	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg p \vee q)$	hyp 2
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg p$	hyp 3
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg p \vee q$	i $\vee$, 3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg p \vee q)$	reit, 2
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg p$	i $\neg$, 3_5
7	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	e $\neg\neg$, 6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ p \Rightarrow q$	reit, 1
9	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	e $\Rightarrow$, 7, 8
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p \vee q$	i $\vee$, 9
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg p \vee q)$	rep, 2
12	$\mid\ \mid\ \neg\neg(\neg p \vee q)$	i $\neg$, 2_11
13	$\mid\ \mid\ \neg p \vee q$	e $\neg\neg$, 12
14	$\mid\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$	i $\Rightarrow$, 1_13