

Exercices de logique

Fiche n°2 Les opérations booléennes (suite)

1- Voici le curieux règlement d'un club britannique :

Article 1 : Tout membre non écossais porte des chaussures oranges

Article 2 : Tout membre porte une jupe ou ne porte pas de chaussures oranges

Article 3 : Les membres mariés ne sortent pas le dimanche

Article 4 : Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais

Article 5 : Tout membre qui porte une jupe est écossais et marié

Article 6 : Tout membre écossais porte une jupe

On va traduire ces articles sous formes d'équations booléennes (c'est-à-dire d'égalités entre expressions booléennes), par exemple l'article 1 signifie que la classe des membres non écossais qui ne portent pas de chaussures oranges est vide. Si on désigne par E les écossais et par O ceux qui portent des chaussures oranges, cela va se traduire par : $\sim E \cdot \sim O = 0$.

Traduire tous ces articles sous forme d'équations booléennes de ce genre.

A votre avis, ce règlement est-il cohérent ?

2- Même exercice avec cet autre règlement :

Article 1 : les membres de la direction financière sont choisis parmi ceux de la direction générale.

Article 2 : nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque s'il n'est membre de la direction financière.

Article 3 : Aucun membre de la direction de la bibliothèque n'est membre de la direction financière.

3- Monsieur Dupont, père de famille, doit assister à un match de tennis. Il a promis d'emmener Vincent ou Etienne et il a promis d'autre part à Marie qu'il l'emmènerait avec lui ou qu'il laisserait Vincent à la maison. Si V représente « il emmène Vincent », E « il emmène Etienne », M « il emmène Marie ». Exprimer le contenu de la promesse de Monsieur Dupont comme une expression booléenne.

Monsieur Dupont peut-il emmener avec lui un seul de ses enfants tout en ayant tenu sa promesse ? Et s'il emmène les trois enfants ?

4- Dans l'exercice suivant, afin de ne pas faire de confusion entre les opérations sur les classes et les opérations sur les nombres, on note \cup l'opération additive d'une algèbre de Boole et \cap l'opération multiplicative. On notera au moyen d'un « ' » l'opération de complémentation. Soit $\#(x)$ le nombre d'éléments d'une classe x d'individus. A quoi est égal $\#(x \cup y)$, en fonction de $\#(x)$, $\#(y)$ et $\#(x \cap y)$?

Soit maintenant trois classes d'individus : x, y et z. Trouver une égalité semblable à la précédente pour calculer $\#(x \cup y \cup z)$.

Soit les données statistiques suivantes :

Nombre total d'étudiants :	600
Au-dessus de 24 ans :	312
Licenciés :	187

Mariés :	265
Licenciés de plus de 24 ans :	24
Mariés de plus de 24 ans :	90
Mariés licenciés :	49
Mariés licenciés de plus de 24 ans :	14

Calculer $\#(x' \cap y' \cap z')$

En déduire que ces données sont absurdes !

5- Soit $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$, l'ensemble des diviseurs de 70. On définit $+$, \times et le complémentaire sur cet ensemble par :

$$a + b = \text{ppcm}(a, b)$$

$$a \times b = \text{pgcd}(a, b)$$

$$a' = 70/a$$

a) Démontrer que D_{70} est une algèbre de Boole. Quels sont les éléments jouant respectivement les rôles de 0 et de 1 ?

b) A quoi correspond la relation « \leq » qu'on peut définir sur toute algèbre de Boole par (cf. cours) : $x \leq y =_{\text{def}} x \times y = x$

c) Représenter cet ensemble par un diagramme de la manière suivante : chaque élément est un point et on trace une flèche de x vers y si x divise y et s'il n'existe pas de z , $z \neq x$ et $z \neq y$ tel que x divise z et z divise y . Qu'observez-vous ? Peut-on dire que l'ensemble D_{70} est ordonné ? totalement ordonné ? Que sont 1 et 70 dans cette représentation ?

6- Soit $A = \{a, b, c\}$, un ensemble à trois éléments. Soit $\wp(A)$ l'ensemble de toutes ses parties.

a) Les énumérer.

b) Quelles opérations apparaissent comme donnant « naturellement » une structure d'algèbre de Boole à $\wp(A)$?

c) Représenter $\wp(A)$ au moyen d'un diagramme comme dans la question précédente.

d) Par quoi est remplacée la relation de divisibilité ? Par quoi sont remplacés 1 et 70 ?

On rajoute à A un quatrième élément, d . Soit $A' = \{a, b, c, d\}$.

a) Fabriquer une représentation en diagramme de $\wp(A')$ à partir de celle de $\wp(A)$.

b) Retrouver sur cette construction la « loi de dédoublement des parties », autrement dit le fait qu'en ajoutant un élément à un ensemble on double le nombre de ses parties.

c) En déduire que si n est le nombre d'éléments d'un ensemble A , alors le nombre de ses parties est 2^n .

7 – Simplifier les expressions booléennes :

$$(a + b)(c + a') + b(c' + b')$$

$$(a + bc) + (c + b'c + ab)(b + c')b + (a + a'b')$$

8- Dans une pièce, il y a trois interrupteurs A, B, C . La pièce est allumée quand un nombre impair d'interrupteurs est en position 1 (fermé) et elle est éteinte sinon. Déterminer tous les cas de figure possibles. En déduire l'expression booléenne L qui donne la valeur 1 quand la pièce est allumée et 0 quand elle est éteinte en fonction de A, B et C .