

Exercices de logique propositionnelle

1- Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies**?

- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q))$
- $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r))$

2- Donner la **négation** de l'expression suivante (sous une forme la plus simple possible):

$$(q \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

3 – Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

BROWN : *Jones est coupable et Smith est innocent.*

JONES : *si Brown est coupable, alors Smith aussi*

SMITH : *je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.*

Soit B, J, S les énoncés : « Brown est innocent », « Jones est innocent », « Smith est innocent ».

Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique. Calculer les valeurs de vérité des trois formules obtenues, puis répondre aux questions suivantes :

- (a) – les témoignages sont-ils compatibles ?
- (b) – quel témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre ?
- (c) – en supposant que tous sont innocents, lequel aurait produit un faux serment ?
- (d) - en supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai qui est innocent, qui est coupable ?
- (e) – en supposant que l'innocent a dit la vérité et que le coupable a menti, qui est innocent et qui est coupable ?

4 – Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un **chant obscène** et un **rire sardonique**, dont on peut cependant influencer le comportement en **jouant de l'orgue** ou en **brûlant de l'encens**.

a – compte-tenu des données suivantes :

- (i) le chant ne se fait pas entendre, à moins que l'on joue de l'orgue sans que le rire se fasse entendre
- (ii) si on brûle de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
- (iii) (en ce moment) le chant se fait entendre et le rire est silencieux.
Peut-on en conclure que :
- (iv) (en ce moment) on joue de l'orgue et on ne brûle pas d'encens ?

b- on remplace la proposition (ii) par :

- (ii') si on brûle de l'encens, le rire ne se fait entendre que si le chant est silencieux.

La proposition (iv) est-elle compatible avec (i), (ii'), (iii) ? est-elle déductible de (i), (ii'), (iii) ?

5- On introduit le symbole "|":barre de Scheffer ou encore "barre d'incompatibilité" en définissant: $p | q$ par: **p et q sont incompatibles (p et q ne peuvent pas être vraies en même temps)**. Donner sa table de vérité? Démontrer que ce connecteur suffit à définir tous les autres.

6 - Montrer que tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables à partir des seuls connecteurs: \Rightarrow et \neg .

7- Analyser la validité des arguments suivants:

" Si la paix survient, alors il y aura une crise économique à moins que le pays se dote d'armes nouvelles ou bien exécute un large programme d'investissement intérieur dans les secteurs de l'enseignement, de la santé et de la lutte contre la pauvreté. Il n'est pas possible de se mettre d'accord sur les objectifs que peut se donner un large programme d'investissement intérieur. Donc si la paix survient et qu'il n'y a pas de crise économique le pays doit se doter d'armes nouvelles."

" A moins que nous continuions la politique de soutien des prix, nous perdrons les voix des agriculteurs. Si nous continuons cette politique, la surproduction continuera, sauf si nous contingentons la production. Sans les voix des agriculteurs, nous ne serons pas réélus. Donc si nous sommes réélus et si nous ne contingentons pas la production, il continuera d'y avoir surproduction ."

8- Dire si les ensembles suivants sont contradictoires ou satisfaisables :

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s), p \vee r, q, p \Rightarrow r, \neg s\}$$

$$\{p \vee q, (r \Rightarrow s) \Rightarrow p, (q \vee \neg r) \Rightarrow (\neg p \wedge q), r, s \Rightarrow \neg q, \neg s \Rightarrow \neg p \wedge q \wedge r\}$$