Logique

Cours de Licence de Sciences du Langage (L2)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

2 – Opérations booléennes

2.1 Interprétation sur {0, 1}

- On appelle *domaine d'interprétation* un ensemble non vide contenant les constantes et où les variables prennent leurs valeurs
- 0 et 1 sont deux constantes : le domaine d'interprétation doit au moins les contenir
- Choisissons comme domaine de l'interprétation l'ensemble {0, 1}
- Cela signifie que les variables ont pour valeurs des éléments de cet ensemble (on appelle de façon générale *variable booléenne* une variable à valeurs dans {0, 1})
- + et × sont interprétées comme des lois de composition interne sur {0, 1} que nous allons définir (tables)
- Cette interprétation est « la plus petite » que nous pouvons donner aux opérations booléennes
- Afin d'avoir une chance que les vérités de l'interprétation correspondent aux théorèmes et aux axiomes… il faut faire un choix judicieux des valeurs attribuées par + et × aux couples d'éléments de {0, 1}

  <u>0 étant élément neutre de +,</u> on a:
  $0 + 0 = 0$ et $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
  <u>1 étant élément absorbant de +,</u> on a:
  $1 + 1 = 1$

  D'où la première table

+	0	1
0	0	1
1	1	1

- Le texte de Boole nous a invité à utiliser le symbole « – » pour marquer une opération de pseudo-opposée par rapport à +, en fait, 1-x devait être compris comme la classe **complémentaire** de x. Pour éviter cette « soustraction », on peut considérer 1-x comme le résultat **d'une opération unaire sur x**, qu'on notera par exemple ~x, avec la définition:

	0	1
~	1	0

- De même, on a:

  $1 \times 1 = 1$; $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$
  $0 \times 0 = 0$
  D'où la deuxième table:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Verifier que les formules suivantes sont vraies (ce qui signifie que dans tous les cas de valeurs pour x, y, z… les deux côtés du signe = prennent la même valeur):

$x(y+z) = xy + xz$; $x+yz = (x+y)(x+z)$
$x(1 - x) = 0$; $x + (1 - x) = 1$
$x + y = xy + x(1-y) + (1-x)(1-y) + (1-x)y$
$1-(x+y) = (1-x)(1-y)$; $1-xy = (1-x)+ (1-y)$
(ou: $\sim(x+y) = \sim x \sim \times y$; $\sim(x \times y) = \sim x + \sim y$)

2.2 *Aspect système formel*

2.2.1 Symboles

Nous prenons volontairement des symboles distincts de +, × etc. afin de définir *une structure la plus générale possible*, en faisant abstraction de toute interprétation possible.
Des symboles souvent utilisés sont, pour l es opérations: $\wedge$ et $\vee$, pour les constantes: $\perp$ et T. Nous introduisons également le symbole ~. Cette structure est appelée ***algèbre de Boole.***

2.2.2 Axiomes

- (i) **[commutativité]** pour tout x et tout y:
  $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$,
- (ii) **[associativité]** pour tout x, tout y et tout z:
  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
- (iii) **[éléments neutres]** $\perp$ élément neutre pour $\vee$, T élément neutre pour $\wedge$,
- (iv) **[distributivité]** pour tout x, tout y et tout z,
  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- (v) **[complémentation]** pour tout x, il existe ~x tel que:
  $x \vee \sim x = T$; $x \wedge \sim x = \perp$

2.2.3 Théorèmes

Théorème 1: idempotence

Démontrer:

Pour tout x, x∨x = x et x∧x = x

<u>solution</u>:

$$\begin{aligned} x &= x \perp \vee \\ &= x \vee (x \sim \wedge x) \\ &= (x \vee x) \wedge (x \sim \vee x) \\ &= (x \vee x) \wedge T \\ &= x \vee x \end{aligned}$$

Théorème 2: éléments absorbants

Démontrer que:

Pour tout x, $x \vee T = T$ et $x \wedge \perp = \perp$
solution:

$$x \vee T = x \vee (x \sim\vee x)$$
$$= (x \vee x) \sim\vee x$$
$$= x \sim\vee x = T$$

Théorème 3: unicité de la négation

Démontrer que :

pour x donné, *~x est unique*

solution: soit x' tel que $x' \wedge x = \perp$ et $x' \vee x = T$, alors:

$$x' = x' \wedge T = x' \wedge (x \sim\vee x) = (x' \wedge x) \vee (x' \sim\wedge x)$$
$$= \vee\perp(x' \sim\wedge x) = (x \sim\wedge x) \vee (x' \sim\wedge x) =$$
$$(x \vee x') \sim\wedge x = T \sim\wedge x = \sim x$$

Théorème 4: lois de De Morgan

Démontrer que:

Pour tout x et tout y:

$\sim(x \vee y) = \sim x \sim\wedge y$

$\sim(x \wedge y) = \sim x \sim\vee y$

solution: il faut utiliser le résultat précédent! Pour cela, démontrer que:

$(\sim x \sim\wedge y) \wedge (x \vee y) = \perp$ et que

$(\sim x \sim\wedge y) \vee (x \vee y) = T$

Théorème 5 : loi de double négation

Démontrer que:

Pour tout x, $\sim(\sim x) = x$

Logique de l'inclusion

Démontrer:

$x \vee y \leq z$ si et seulement si $x \leq z$ et $y \leq z$

$x \leq y \wedge z$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \leq z$

$x \leq y$ si et seulement si $\sim y \leq \sim x$

$x \leq y$ si et seulement si $x \sim\wedge y = \perp$

$x \vee y$ est la borne supérieure de x et de y

$x \wedge y$ est la borne inférieure de x et de y

2.3 Résumé

Partis des idées générales de George Boole, nous avons d'abord vu qu'il était possible de trouver facilement un ensemble et des opérations sur cet ensemble qui les vérifiaient intégralement. Les idées de Boole ne sont donc pas des « vues de l'esprit » puisqu'elles se réalisent sur au moins un cas concret (l'ensemble {0, 1} muni des trois opérations qu'on y a définies). Ensuite, nous avons voulu axiomatiser la démarche de Boole, c'est-à-dire donner un stock minimum de propositions de départ (les « axiomes ») à partir desquelles toutes les autres propriétés imaginées par Boole pouvaient se déduire à titre de théorèmes. Ce faisant, nous avons défini une structure : celle d'algèbre de Boole. Il restera, dans la prochaine leçon, à dire à quoi peut bien servir cette structure.