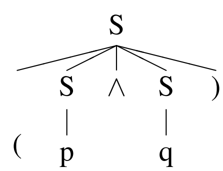
Outils formels pour l'étude du langage

Cours de Master, ENS, MasterCog + LTD, A. Lecomte, 2009-2010

Rappels de logique propositionnelle

1 Syntaxe des formules

Le langage L_p de la logique propositionnelle est défini par la grammaire suivante :
$V_T = \{p, q, r, s, ..., \bot, \top, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, (,)\}$
$V_N = \{S\}$
Axiome : S
Règles :
$S \rightarrow p|q|r|s|...|\bot|\top(S \wedge S)|(S \vee S)|(S \Rightarrow S)|(S \Leftrightarrow S)|(\neg S)$
Exemple :



Les parenthèses sont là pour éviter les ambiguïtés de lecture. Par exemple, $(p \wedge (q \Rightarrow r))$ est différent de $((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

2 Interprétation des formules

2.1 Modèles et tables de vérité

Une formule est interprétée par rapport à une assignation de valeurs de vérité ϕ aux propositions atomiques $(p, q, r, s, ...)$ qui la composent. Ces propositions sont donc vues comme des *variables*. Une telle assignation est aussi appelé *modèle* de la formule, ou *monde possible* dans lequel elle est évaluée.
Etant donnée une telle assignation ϕ, on démontre qu'il existe une et une seule manière de l'étendre en une *valuation* v_ϕ qui assigne une valeur de vérité à toutes les formules de telle sorte que :

1. $v_\phi(p) = \phi(p), v_\phi(q) = \phi(q)$, etc.
2. $v_\phi(A \wedge B) = 1$ si et seulement si $v_\phi(A) = v_\phi(B) = 1$
3. $v_\phi(A \vee B) = 0$ si et seulement si $v_\phi(A) = v_\phi(B) = 0$
4. $v_\phi(A \Rightarrow B) = 0$ si et seulement si $v_\phi(A) = 1$ et $v_\phi(B) = 0$
5. $v_\phi(\neg A) = 1$ si et seulement si $v_\phi(A) = 0$

6. $v_\phi(\bot) = 0$
7. $v_\phi(\top) = 1$

Les deux dernières lignes montrent que $\bot$ et $\top$ sont des *constantes* (leur valeur ne change pas en fonction du modèle), ce sont respectivement les constantes "toujours faux " et "toujours vrai".
v_ϕ étant définie pour une formule donnée pour tout ϕ, si on fait varier ϕ, on obtient la *table de vérité* de la formule, autrement dit sa valeur de vérité en fonction du modèle ϕ qui est choisi.
Soit par exemple la formule $(p \wedge ((q \vee r) \Rightarrow (\neg p)))$, elle a la table de vérité suivante :

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$((q \vee r) \Rightarrow (\neg p))$	$(p \wedge ((q \vee r) \Rightarrow (\neg p)))$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0

Autrement dit, ce n'est que pour le modèle ϕ_4 défini par :
$\phi_4(p) = 1, \phi_4(q) = 0, \phi_4(r) = 0$ qu'elle est vraie. Une formule A telle que pour tout modèle ϕ, on ait $v_\phi(A) = 1$ est appelée une *tautologie*. On vérifiera que les formules suivantes sont des tautologies :

- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$
- $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
- $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
- $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$
- $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)))$
- $((\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A)$
- $(A \vee (\neg A))$

2.2 Relation de Conséquence Logique

On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ *permettent de déduire* B ou simplement qu'elles *impliquent* B et on écrit $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \models B$ si et seulement si, quel que soit ϕ, si $v_\phi(A_1) = v_\phi(A_2) = ... = v_\phi(A_n) = 1$, alors $v_\phi(B) = 1$.
$A_1, A_2, ..., A_n$ sont appelées les *prémisses* et B la *conclusion*.
On peut facilement vérifier avec cette définition que, quelles que soient les formules $A, B, C, ...$ on a :

- $\{A, A \Rightarrow B\} \models B$ (*modus ponens*)
- $\{\neg B, A \Rightarrow B\} \models \neg A$ (*modus tollens*)

- $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ (*règle du syllogisme*)
- $\models A \vee \neg A$ (*tiers exclu*)
- $\{A \Rightarrow \bot\} \models \neg A$ (*raisonnement par l'absurde*)
- $\{A, \neg A\} \models B$ (*ad impossibile sequitur quodlibet*)

La dernière de ces règles exprime le fait qu'à partir d'une contradiction, on peut déduire n'importe quoi (tout et son contraire). la phrase latine signifie justement cela : *d'une impossibilité découlent logiquement toutes les propositions arbitraires que l'on veut*. Evidemment, elle a comme cas particulier : $\{A, \neg A\} \models \bot$.
Une règle dont la partie gauche est vide (comme le tiers exclu ci-dessus) exprime simplement une vérité universelle (pas besoin de prémisses particulières pour la prouver).
Il est intéressant de remarquer que toutes les tautologies sont dans ce cas : si ϕ est une tautologie, alors $\models \phi$. Donc on peut réécrire toutes les tautologies ci-dessus sous la forme :

- $\models (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- $\models ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$
- $\models (\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
- $\models (\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
- $\models ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$
- $\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)))$
- $\models ((\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A)$
- $\models (A \vee (\neg A))$

Noter qu'on pourrait aussi bien écrire $\top \models \phi$ au lieu de $\models \phi$, marquant ainsi que le vide devant le symbole $\models$ peut être rempli par la constante $\top$ (élément neutre de la conjonction : $A \wedge \top \equiv A$).

Théorème de la déduction

On démontre facilement le (méta)- théorème suivant :

$\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}\} \models (A \Rightarrow B)$

Autrement dit, pour prouver $A \Rightarrow B$, il suffit d'ajouter A parmi les prémisses (en tant qu'*hypothèse*) et de prouver B.

Théorème de la réfutation

On démontre aussi le (méta)- théorème suivant :

$\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\} \models \bot$ si et seulement si $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}\} \models (\neg A)$

On démontre encore que :

$\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\} \models \bot$ est équivalent à "il n'existe aucun modèle ϕ permettant de rendre vraies simultanément toutes les formules de l'ensemble $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\}$"
Symétriquement avec le traitement de $\top$, on peut considérer que $\bot$ est ce qui permet de remplir un vide non plus à gauche mais à droite du symbole $\models$, de telle sorte que :

la relation $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\} \models \perp$ pourrait aussi bien s'écrire $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A\} \models$.