# Sémantique formelle

*Cours de Licence de Sciences du Langage (L3)*
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

**Leçon 2** – Introduction à la logique des prédicats du premier ordre

## 2 Langages prédicatifs et modèles

### 2.1 La notion de langage (au sens formel)

Dans les exemples de la leçon précédente, nous avons traduit des phrases de la langue en des expressions (formules) utilisant des signes qui n'appartiennent pas à la langue, comme $\forall, \exists, \wedge, \vee$. Ces formules appartiennent à un système formel, ou langage formel. Qu'est-ce qu'un langage formel, et en quoi se distingue-t-il d'une langue (naturelle) ? Un langage formel est défini par un ensemble de règles *a priori*, à partir d'un stock de symboles également donné *a priori*. Ainsi notre langage formel actuel contient-il pour l'instant :

**Symboles (vocabulaire) :**

- des symboles qui servent à désigner (*dénoter*) des objets (ou des *individus*)
- ces symboles se subdivisent en deux catégories : les **constantes individuelles** (Pierre, …) et les **variables individuelles** : x, y, z, …
- des symboles qu'on supposera être uniquement des **constantes**, qui servent à désigner des propriétés (« être norvégienne »…) ou des relations (« suivre » en parlant d'un étudiant et d'un cours, « épouser » en parlant d'un individu et d'un autre, mais on pourrait avoir aussi « être assis entre… et … » en parlant d'étudiants dans la salle de cours), et qu'on appelle des symboles de prédicats, ou plus brièvement **prédicats**,
- comme indiqué dans les exemples donnés entre parenthèses, ces prédicats peuvent représenter des *propriétés d'individus*, auquel cas ils sont dits *unaires* (ou d'arité 1), ou bien représenter des *relations* entre *deux* entités, auquel cas ils sont dits *binaires* (ou d'arité 2), ou bien représenter des relations entre *trois* entités, auquel cas ils sont dits *ternaires* (ou d'arité 3), etc.
- des symboles logiques qui se répartissent en deux catégories :
    - o les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$
    - o les quantificateurs : $\forall$, $\exists$
- des symboles de ponctuation : (, ) et éventuellement d'autres formes de parenthèses

**Règles de formation :**

- on appellera termes les symboles de constante et de variable individuelles
- si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et si A est un symbole de prédicat d'arité n, alors $A(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule atomique,
- si A et B sont des formules, alors $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ sont des formules,
- si A est une formule, $(\neg A)$ est une formule,
- si $\xi$ est une variable individuelle et si A est une formule, alors $(\forall\xi)A$ et $(\exists\xi) A$ sont des formules

[notions reliées à voir ou revoir : sous-formule, champ d'un quantificateur, variables libres, variables liées, cf. cours de sémantique 2]

Un tel langage formel, basé sur la logique des prédicats, est appelé **langage prédicatif**. Un langage prédicatif particulier sera associé à tout ensemble de phrases étudiées. Il comportera exactement les constantes individuelles et les symboles de prédicat dont on aura besoin pour traduire les phrases.
On voit bien en quoi un tel langage diffère d'une langue : un langage formel est artificiel, son vocabulaire et ses règles de syntaxe sont définis a priori, à la différence évidemment d'une langue naturelle dont on ne finit jamais de découvrir les règles…

## 2.2 La notion de modèle

### *2.2.1 Structure*

On définit d'abord *une structure* comme la donnée d'un ensemble (*univers,* ou *domaine*, D), avec des *relations* de diverses *arités* sur cet ensemble. [<u>On rappellera à ce propos quelques notions mathématiques de base</u>]. On rappelle que des relations peuvent être définies aussi bien *en compréhension* (« être à gauche de » possède telle et telle signification) *qu'en extension* (« être à gauche de » se définit comme l'ensemble des cas réunissant un individu x et un individu y tels que x soit à gauche de y). Ainsi revient-il au même de se donner une propriété (relation d'arité 1) et un ensemble, ou bien une relation binaire et un ensemble de couples.
Considérons la phrase (3) de la leçon précédente (*tous les étudiants suivent un cours de philosophie*), et essayons de trouver une structure pour l'interpréter. Pour cela, il nous faut :

- D : un ensemble contenant à la fois (au moins) des *étudiants* et des *intitulés de cours*
- deux sous-ensembles (relations d'arité 1) :
    - E : l'ensemble des étudiants
    - C : l'ensemble des cours de philosophie
- une relation binaire S sur D entre les éléments de E et ceux de C, telle que S(x, y) est vrai si et seulement si l'étudiant x suit le cours y. Cette relation peut aussi être donnée sous la forme de l'ensemble des couples (x, y) tels que la relation S ait lieu entre leurs composantes (la relation binaire S est dite alors donnée *en extension*).

Supposons par exemple les données suivantes, définissant une structure S1 :

- D = {paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne, cours1, cours2, cours3, cours4}
- E = {paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne},
- C = {cours1, cours2, cours3}
- S = {(paul, cours1), (paul, cours2), (julie, cours3), (julie, cours1), (jacques, cours1), (pierre, cours4), (pierre, cours2), (marie, cours3), (marie, cours2), (adrienne, cours1)}

### *2.2.2 Interprétation*

*Ensuite on définit la notion d'interprétation*, pour le langage prédicatif L spécifié, qui contient ici :

- les constantes individuelles **paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne, cours1, cours2, cours3, cours4**
- les prédicats unaires **étudiant** et **cours_philo**
- le prédicat binaire **suivre**

Cette interprétation est une fonction I qui associe à toute constante individuelle un élément de D, à tout *prédicat unaire* un *ensemble* et à tout *prédicat binaire* une *relation binaire* (rappelons que les prédicats sont des *symboles*, alors que les ensembles et les relations sont des *entités* mathématiques censées représenter la situation que nous décrivons au moyen de nos phrases). Ici, définissons par exemple I de manière que :

I(**paul**) = paul, etc.
I(**étudiant**) = E,
I(**cours_philo**) = C
I (**suivre**) = S

### *2.2.3 Evaluation d'une formule atomique sans variable libre*

On peut définir facilement la condition de vérité d'une formule atomique, lorsque celle-ci ne contient que des constantes. Soit par exemple la formule atomique **suivre**(**julie**, **cours3**), qui est la formule associée à la phrase *Julie suit le cours n°3*. Cette formule (et donc la phrase associée) sera dite VRAIE si et seulement si le couple (julie, cours3) appartient à l'interprétation de la relation **suivre**. Ce qu'on écrit symboliquement :

[[**suivre**(**julie**, **cours3**)]]$^{(D, I)}$ = 1 si et seulement si (I(**julie**), I(**cours3**)) $\in$ I(**suivre**)
autrement dit si et seulement si (julie, cours3) $\in$ S

Nous constatons que c'est le cas pour notre choix de D et I, donc on peut écrire : [[**suivre**(**julie**, **cours3**)]]$^{(D, I)}$ = 1.

### *2.2.4 Evaluation d'une formule atomique avec variables libres*

Cela devient plus subtil si notre formule atomique contient *des variables*. Comment par exemple évaluer [[**suivre**(x, **cours3**)]]$^{(D, I)}$ ?
Par définition d'une variable… x peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des étudiants (remarquons que nous allons utiliser des variables « sortées », c'est-à-dire munies d'une « sorte », qui indique dans quel sous-ensemble de l'univers elles doivent prendre leur valeur, de cette manière nous pourrons nous dispenser d'interrogations inutiles sur le cas où x prend pour valeur un cours de philosophie…). La valeur de vérité de la formule **suivre**(x, **cours3**) est donc variable, elle dépend du nom de l'individu que l'on va mettre à la place de x. Pour traiter ces cas, nous allons introduire la notion d'*assignation* (ou *fonction d'assignation*). Chaque fois que nous observons une situation qui contient des variables, ces variables ont une certaine valeur. On dit *qu'une certaine valeur leur a été assignée*. Par exemple, je peux observer une situation ou quelqu'un « suit le cours n°3 ». Si cette situation est effectivement le cas, je peux demander le nom d'un individu qui suit ce cours, si c'est Paul, je pourrai dire que j'ai assigné la valeur « Paul » à ce « quelqu'un » indéterminé. Une fonction d'assignation est une fonction qui associe une valeur à chaque variable de notre langage prédicatif (en respectant les sortes, cf. plus haut). On notera [x := paul] une fonction d'assignation qui donne la valeur « paul » à x. On aura :

*sous une assignation* [x := paul], [[**suivre**(x, **cours3**)]]$^{(D, I)}$ = 1 si et seulement si (paul, cours3) $\in$ S

la valeur de vérité d'une formule contenant une variable libre dépend donc, en plus de la structure (D, I), *d'une fonction d'assignation*. Soit g une telle fonction, au aura désormais par exemple :

[[**suivre**(x, **cours3**)]]$^{(D, I), g}$ = 1 si et seulement si (g(x), cours3) $\in$ S

**Remarque** : l'exemple précédent (*situation* où quelqu'un suit le cours n°3) peut faire penser que nous allons traduire la phrase (et non la situation !) *quelqu'un suit le cours n°3* par une formule contenant une variable libre : **suivre**(x, **cours3**), alors qu'il y a une différence importante entre la phrase et la formule, la valeur de vérité de la formule dépend de la valeur assignée à x, alors que la valeur de vérité de la phrase est constante : ou bien il est vrai qu'il y a quelqu'un suivant le cours 3, ou bien c'est faux ! De fait, cette traduction serait fausse. La phrase correctement traduite par cette formule serait plutôt une phrase possédant la même propriété que la formule, à savoir une variabilité de la valeur de vérité, or, quel type d'objet est variable dans la langue si ce n'est *le pronom* ? D'où le fait que **suivre**(x, **cours3**) traduise en réalité une phrase comme *il suit le cours n°3*. Quant à la phrase quelqu'un suit le cours n°3, elle recevra plutôt la traduction : (∃x) **suivre**(x, **cours3**).

### *2.2.5 Evaluation d'une formule quelconque*

Pour prolonger I (l'interprétation) à toutes les phrases et expressions du langage, *il faut des règles*, dont nous donnons ci-dessous quelques échantillons (nous approfondirons ceci plus loin). I va se définir *relativement à une assignation g*.

**Règle d'interprétation de ⇒** : $I^g(A \Rightarrow B) = 0$ *si et seulement si* $I^g(A) = 1$ *et* $I^g(B) = 0$.

**Règle d'interprétation de ∀** : $I^g((\forall x)\ A) = 1$ *si et seulement si toute assignation h égale à g sauf éventuellement en x est telle que* $I^h(A) = 1$.

*Commentaire* : cela signifie que la valeur de vérité de $(\forall x)\ A$ est égale à 1 si et seulement si toutes les assignations de valeurs aux variables qui ne diffèrent entre elles que par la valeur qu'elles assignent à x donnent la valeur 1 à A. On peut dire aussi de manière simplifiée : *quand toutes les autres variables que x gardent la même valeur assignée, A reste égale à 1 quand on assigne une valeur arbitraire à x*.

**Règle d'interprétation de ∃** : $I^g((\exists x)\ A) = 1$ *si et seulement si il existe une assignation h égale à g sauf éventuellement en x telle que* $I^h(A) = 1$.

*Commentaire* : cela signifie que la valeur de vérité de $(\exists x)\ A$ est égale à 1 si et seulement si il existe au moins une assignation de valeurs aux variables, qui ne modifie (éventuellement) que la valeur donnée à x, donnant la valeur 1 à A. On peut dire aussi : *quand toutes les autres variables que x demeurent constantes, A peut être rendue égale à 1 par au moins une valeur assignée à x.*

### *2.2.6 Exemple*

Nous disposons alors des outils nécessaires à l'évaluation de (1) traduit sous la forme (3'), par rapport à la structure M = (D, I). Il s'agit d'évaluer dans cette structure et par rapport à une assignation *g*, la formule :

$$(\forall x)\ (\acute{e}tudiant(x) \Rightarrow (\exists y)\ (cours\ \ philo(y) \wedge suivre(x, y)))$$

(Noter que nous avons un peu changé (3') de manière à obtenir une expression qui corresponde bien à la définition d'un langage prédicatif donné plus haut. (3') était une expression *semi*-formelle, l'expression ci-dessus est une expression formelle. Mais noter aussi *qu'on peut la simplifier en particulier en supprimant les parenthèses qui pourraient s'avérer inutiles*).

Prenons au départ une assignation g quelconque, par exemple celle qui assigne la valeur paul à x et cours2 à y, qu'on pourra noter : [x := paul, y : = cours2].

Utilisons d'abord la règle d'interprétation de ∀ : cette phrase est vraie si et seulement si toutes les assignations de valeurs à x et à y identiques à g sauf éventuellement en x donnent la valeur

« vrai » à la formule $(\textit{étudiant}(x) \Rightarrow (\exists y)\ (\textit{cours philo}(y) \wedge \textit{suivre}(x, y)))$, autrement dit si et seulement si toutes les assignations donnant la valeur « cours2 » à y mais une valeur quelconque à x (notons les [x qcq, y := cours2]) sont telles que :

$(\textit{étudiant}(x) \Rightarrow (\exists y)\ (\textit{cours philo}(y) \wedge \textit{suivre}(x, y)))$ reçoit par I la valeur 1.

Par la règle d'interprétation de ⇒, cela implique que toutes ces assignations lorsqu'elles donnent la valeur 1 à $\textit{étudiant}(x)$ donnent cette même valeur 1 à :
$(\exists y)\ (\textit{cours philo}(y) \wedge \textit{suivre}(x, y))$

mais pour que $(\exists y)\ (\textit{cours philo}(y) \wedge \textit{suivre}(x, y))$ reçoive la valeur 1, il faut et il suffit qu'il existe une assignation h différente de [x qcq, y := cours2]) *éventuellement en y* telle que h donne la valeur 1 à la fois à *cours philo(y)* et à *suivre(x, y)*.

Finalement *toutes* les assignations g qui donnent à x une valeur quelconque doivent être telles que si elles rendent vraie *étudiant(x)*, *il existe au moins* une assignation h identique à g en x mais éventuellement différente en y telle que *cours philo(y)* et *suivre(x, y)* soient vraies toutes les deux. Passons donc en revue les assignations g qui donnent à x une valeur telle que étudiant(x) soit vrai : g peut être telle que g(x) = paul, pierre, marie, jacques, julie ou adrienne, dans chaque cas, on peut bien en effet changer la valeur de y de telle sorte que *cours philo(y)* et *suivre(x, y)* soient vraies :

| | | |
|---|---|---|
| si g(x) = paul | prendre | h(y) = cours1 |
| si g(x) = pierre | prendre | h(y) = cours1 |
| si g(x) = marie | prendre | h(y) = cours1 |
| si g(x) = jacques | prendre | h(y) = cours2 |
| si g(x) = julie | prendre | h(y) = cours2 |
| si g(x) = adrienne | prendre | h(y) = cours1 |

On notera de plus que l'interprétation finale *ne dépend pas* de l'assignation g de départ, ce qui est normal puisque ni x, ni y ne sont *libres* dans la formule évaluée. Donc *par rapport à la structure M, la formule est vraie*. On dit que M est *un modèle* de cette formule.

**Définition** : une structure M est ***un modèle*** *pour un ensemble de formules Φ* si et seulement si toutes les formules appartenant à Φ sont vraies par rapport à la structure M.

Le lecteur vérifiera que la formule correspondant à la deuxième lecture de la phrase (1) n'est pas vraie par rapport à M. **Ainsi on a trouvé une structure qui est un modèle pour la première lecture mais n'en est pas un pour la deuxième :** ***ceci prouve que les deux lectures sont bien différentes***.

Au passage, noter que nous avons obtenu exactement ce que nous voulions : *l'expression des conditions de vérité d'une phrase*. En l'occurrence pour la lecture (3) de (3) ces conditions de vérité s'expriment par *l'existence d'une manière d'associer à tout individu qui est étudiant un cours qui est un cours de philosophie*. Au contraire pour (4), elles s'exprimeront par *l'existence d'un cours de philosophie tel que toute assignation d'une valeur à x conduit à la vérité du fait selon lequel l'étudiant assigné à x suit bien ce cours*.