Sémantique compositionnelle

Cours de Licence de Sciences du Langage (L3)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

Leçon 2 – Langages et modèles

2 Langages prédicatifs et modèles

2.1 La notion de modèle

Dans ce qui suit, après avoir défini un langage formel particulier (langage prédicatif, cf. cours précédent), on cherche à établir rigoureusement ce qu'est l'interprétation d'une formule de ce langage. Nous savons donner une telle interprétation de façon intuitive, par exemple nous savons qu'une formule comme $(\forall x)(etudiant(x) \Rightarrow (\exists y)(prof(y) \wedge renc(x, y)))$ s'interprète comme « tout étudiant rencontre un professeur », mais nous voulons pouvoir assigner de manière précise (au moyen d'une procédure explicite) une valeur de vérité à une telle formule dans une situation donnée.

2.1.1 Structure

On définit d'abord *une structure* comme : la donnée d'un ensemble (*univers,* ou *domaine*, D), avec des *relations* de diverses *arités* sur cet ensemble. [On rappellera à ce propos quelques notions mathématiques de base]. On rappelle que des relations peuvent être définies aussi bien *en compréhension* (« être à gauche de » possède telle et telle signification) *qu'en extension* (« être à gauche de » se définit comme l'ensemble des cas réunissant un individu x et un individu y tels que x soit à gauche de y). Ainsi revient-il au même de se donner une propriété (relation d'arité 1) et un ensemble, ou bien une relation binaire et un ensemble de couples.

Considérons la phrase *tous les étudiants s'adressent à un professeur*, et essayons de trouver une structure pour l'interpréter. Pour cela, il nous faut :

- D : un ensemble d'individus qu'on suppose non vide
- deux sous-ensembles (relations d'arité 1) :
    - E : l'ensemble des étudiants
    - C : l'ensemble des professeurs
- une relation binaire S sur D entre les éléments de D, telle que S(x, y) est vrai si et seulement si x s'adresse à y. Cette relation peut aussi être donnée sous la forme de l'ensemble des couples (x, y) tels que la relation S ait lieu entre leurs composantes (la relation binaire S est dite alors donnée *en extension*).

Supposons par exemple les données suivantes, définissant une structure S1 :

- D = {paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne, alain, anne, laurent, léa}
- E = {paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne},
- C = {alain, anne, laurent, léa}
- S = {(paul, alain), (paul, anne), (julie, laurent), (julie, alain), (jacques, alain), (pierre, léa), (pierre, anne), (marie, laurent), (marie, anne), (adrienne, alain)}

2.1.2 Interprétation

Ensuite on définit la notion d'interprétation, pour le langage prédicatif L spécifié, qui contient ici :

- les constantes individuelles **paul, pierre, marie, jacques, julie, adrienne, alain, anne, laurent, léa**
- les prédicats unaires **étudiant** et **prof**
- le prédicat binaire **adr**

Cette interprétation est une fonction I qui associe à toute constante individuelle un élément de D, à tout *prédicat unaire* un *ensemble* et à tout *prédicat binaire* une *relation binaire* (rappelons que les prédicats sont des *symboles*, alors que les ensembles et les relations sont des *entités* mathématiques censées représenter la situation que nous décrivons au moyen de nos phrases). Ici, définissons par exemple I de manière que :

I(**paul**) = paul, etc.
I(**étudiant**) = E,
I(**prof**) = C
I (**adr**) = S

2.1.3 Evaluation d'une formule atomique sans variable libre

On peut définir facilement la condition de vérité d'une formule atomique, lorsque celle-ci ne contient que des constantes. Soit par exemple la formule atomique **adr**(**julie**, **laurent**), qui est la formule associée à la phrase *Julie s'adresse à Laurent*. Cette formule (et donc la phrase associée) sera dite VRAIE si et seulement si le couple (julie, laurent) appartient à l'interprétation de la relation **adr**. Ce qu'on écrit symboliquement :

$[[\mathbf{adr}(\mathbf{julie}, \mathbf{laurent})]]^{(D, I)} = 1$ si et seulement si $(I(\mathbf{julie}), I(\mathbf{laurent})) \in I(\mathbf{adr})$
autrement dit si et seulement si (julie, laurent) $\in$ S

Nous constatons que c'est le cas pour notre choix de D et I, donc on peut écrire : $[[\mathbf{adr}(\mathbf{julie}, \mathbf{laurent})]]^{(D, I)} = 1$.

2.1.4 Evaluation d'une formule obtenue au moyen de connecteurs

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement la notation $[[A]]^{(D, I)}$ pour « l'interprétation de A par rapport à D et à I ». Etant donné un terme t (constante ou variable), nous écrirons aussi [[t]] son interprétation, même si nous ne la connaissons pas encore dans le cas d'une variable. Mais bien sûr, dans le cas d'une constante, on a : $[[\mathbf{c}]]^{(D, I)} = I(\mathbf{c})$. Nous aurons :
Si A et B sont des formules :

- $[[(A \wedge B)]]^{(D, I)} = 1$ si et seulement si $[[A]]^{(D, I)} = [[B]]^{(D, I)} = 1$
- $[[(A \vee B)]]^{(D, I)} = 0$ si et seulement si $[[A]]^{(D, I)} = [[B]]^{(D, I)} = 0$
- $[[(A \Rightarrow B)]]^{(D, I)} = 0$ si et seulement si $[[A]]^{(D, I)} = 1$ et $[[B]]^{(D, I)} = 0$
- $[[(A \Leftrightarrow B)]]^{(D, I)} = 1$ si et seulement si $[[A]]^{(D, I)} = [[B]]^{(D, I)}$
- $[[(\neg A)]]^{(D, I)} = 1$ si et seulement si $[[A]]^{(D, I)} = 0$

2.1.5 Evaluation d'une formule atomique avec variables libres

Cela devient plus subtil si notre formule atomique contient *des variables*. Comment par exemple évaluer $[[\mathbf{adr}(x, \mathbf{laurent})]]^{(D, I)}$?
Par définition d'une variable… x peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des étudiants. La valeur de vérité de la formule **adr**(x, **laurent**) est donc variable, elle dépend du nom de l'individu que l'on va mettre à la place de x.

Nous allons faire deux hypothèses fortes :

1- tous les éléments de D sont nommés, autrement dit il existe suffisamment de constantes dans notre langage pour désigner tous les individus de D,
2- toutes les constantes désignent un individu de D (il n'y en a pas plus que nécessaire)

Etant donné un terme t (variable ou constante), nous définissons d'autre part la substitution de t à x (une variable) dans la formule φ comme le remplacement dans φ de toute occurrence de la variable x par t. On note explicitement cette substitution : $[x/t]\ \varphi$.
On voit, avec ces notations que :

$$[x/\mathbf{paul}][[\mathbf{adr}(x, \mathbf{laurent})]]^{(D,\ I)} = 1 \text{ si et seulement si (paul, cours3)} \in S$$

Si une formule contient plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on pourra avoir la substitution de termes $t_1, \ldots, t_n$ simultanément à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans φ, qu'on notera : $[x_1/ t_1, x_2/ t, \ldots, x_n/ t_n]\ \varphi$.
On appellera aussi $[x_1/ t_1, x_2/ t, \ldots, x_n/ t_n]$: une *assignation* des termes $t_1, \ldots, t_n$ à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La valeur de vérité d'une formule contenant au moins une variable libre dépend donc, en plus de la structure (D, I), *d'une assignation*. On pourra noter généralement *a* une telle assignation.
On aura par exemple, où a(x) est le terme qui est substitué à x dans l'assignation a :
$[[\mathbf{suivre}(x, \mathbf{laurent})]]^{D,\ I,\ a} = 1$ si et seulement si $[[[x/a(x)]\ \mathbf{suivre}(x, \mathbf{laurent})]]^{D,\ I,\ a'} = 1$ où a' n'affecte de constante qu'aux variables différentes de x (ici, il n'y en a pas, donc a' est inutile) (*a'* est la partie de a qui ne concerne que les variables autres que x), c'est-à-dire :

$$(a(x), \text{laurent}) \in S$$

2.1.6 Evaluation d'une formule quelconque

Désormais, nous pouvons revenir au cas des formules atomiques et écrire :
Règle d'interprétation d'une formule atomique :
Si P est un prédicat d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes (constantes ou variables), alors :
$[[P(t_1, \ldots, t_n)\ ]]^{D,\ I,\ a} = 1$ si et seulement si $([[t_1]]^{D,\ I,\ a}, \ldots, [[t_n]]^{D,\ I,\ a}) \in I(P)$, où :

- $[[t]]^{D,\ I,\ a} = I(a(t))$ si t est une variable et
- $[[t]]^{D,\ I,\ a} = I(t)$ si t est une constante

Règle d'interprétation de $\forall$: $[[(\forall x)\ A]]^{D,\ I,\ a} = 1$ si et seulement si pour toute constante c, $[[[x/c]A]]^{D,\ I,\ a'} = 1$ où *a'* est la partie de a qui ne concerne que les variables autres que x.

Commentaire : cela signifie que la valeur de vérité de *(∀x) A* est égale à 1 si et seulement si *quand toutes les autres variables que x gardent la même constante assignée, A reste égale à 1 quand on assigne une constante arbitraire à x.*

Règle d'interprétation de $\exists$: $[[(\exists x)\ A)]]^{D,\ I,\ g} = 1$ si et seulement si il existe une constante c telle que $[[[x/c]A]]^{D,\ I,\ a'} = 1$ où *a'* est la partie de a qui ne concerne que les variables autres que x.

Commentaire : cela signifie que la valeur de vérité de *(∃x) A* est égale à 1 si et seulement si *quand toutes les autres variables que x demeurent constantes, A peut être rendue égale à 1 par au moins une valeur assignée à x.*

2.1.7 Exemple

Nous disposons alors des outils nécessaires à l'évaluation de la formule suivante par rapport à un domaine D, une fonction d'interprétation I et une fonction d'assignation g :

$$(\forall x)\ (\acute{e}tudiant(x) \Rightarrow (\exists y)\ (prof(y) \wedge adr(x, y)))$$

Utilisons d'abord la règle d'interprétation de $\forall$: cette phrase est vraie si et seulement si toutes les assignations d'une constante **c** à x donnent la valeur 1 à la formule [x/**c**] $(étudiant(x) \Rightarrow (\exists y)\ (prof(y) \wedge adr(x, y)))$, c'est-à-dire :

$(étudiant(c) \Rightarrow (\exists y)\ (prof(y) \wedge adr(c, y)))$ reçoit la valeur 1.

Par la règle d'interprétation de $\Rightarrow$, cela implique que toutes ces assignations lorsqu'elles donnent la valeur 1 à $étudiant(c)$ donnent cette même valeur 1 à :

$(\exists y)\ (prof(y) \wedge adr(c, y))$

mais pour que $(\exists y)\ (prof(y) \wedge adr(c, y))$ reçoive la valeur 1, il faut et il suffit qu'il existe une constante **d** telle que $[y/d](prof(y) \wedge adr(c, y)) = 1$, autrement dit que
$(prof(d) \wedge adr(c, d)) = 1$

Finalement, pour que la formule soit vraie, il est nécessaire et suffisant que pour toute constante **c**, il existe une constante **d** telle que $(prof(d) \wedge adr(c, d)) = 1$.
Passons donc en revue les assignations a qui assignent à x une constante **c** telle que étudiant(**c**) soit vrai : a peut être telle que a(x) = **paul, pierre, marie, jacques, julie** ou **adrienne**, dans chaque cas, on peut bien en effet assigner une constante à y de telle sorte que *prof(y)* et *adr(x, y)* soient vraies :

si a(x) = **paul**	prendre	y = **alain**
si a(x) = **pierre**	prendre	y = **alain**
si a(x) = **marie**	prendre	y = **alain**
si a(x) = **jacques**	prendre	y = **anne**
si a(x) = **julie**	prendre	y = **anne**
si a(x) = **adrienne**	prendre	y = **alain**

Ainsi, *par rapport à la structure M, la formule est vraie*. On dit que M est *un modèle* de cette formule.

Définition : une structure M est ***un modèle*** *pour un ensemble de formules* Φ si et seulement si toutes les formules appartenant à Φ sont vraies par rapport à la structure M.

Le lecteur vérifiera que la formule correspondant à la deuxième lecture de la phrase (1) n'est pas vraie par rapport à M. **Ainsi on a trouvé une structure qui est un modèle pour la première lecture mais n'en est pas un pour la deuxième : *ceci prouve que les deux lectures sont bien différentes*.**

Au passage, noter que nous avons obtenu exactement ce que nous voulions : *l'expression des conditions de vérité d'une phrase*. En l'occurrence pour la lecture (3) de (3) ces conditions de vérité s'expriment par *l'existence d'une manière d'associer à tout individu qui est étudiant un professeur auquel il s'adresse*. Au contraire pour (4), elles s'exprimeront par *l'existence d'un professeur tel tout étudiant s'adresse à lui*.