Structures mathématiques du langage

Notions mathématiques de base

Résumé

Ce chapitre 0 donne brièvement quelques éléments de connaissance nécessaires pour aborder le reste de ce livre. Outre des structures algébriques comme la résiduation, il traite les systèmes de preuves qui interviennent dans les approches logiques de la syntaxe et de la sémantique. Comme le lecteur peut le constater, nous ne faisons pas de différence fondamentale, à ce stade, entre logique et mathématiques : la logique moderne nous a appris à traiter les concepts essentiels de la logique (prédicat comme *fonction*, preuves comme *objets*, preuves comme *programmes*...) sous un angle mathématique.

Table des matières

1 Monoïdes, groupes, prégroupes et résiduation **2**
- 1.1 Monoïdes . . . 2
- 1.2 Groupes . . . 2
- 1.3 Monoïdes ordonnés, groupes ordonnés, protogroupes et prégroupes . . . 3
- 1.4 Correspondances de Galois et résiduation . . . 3

2 Rappels de logique : la déduction naturelle **5**
- 2.1 Présentation de Fitch . . . 5
- 2.2 Déduction naturelle sous la forme d'arbres . . . 10
- 2.3 Présentation en forme de séquents . . . 12
- 2.4 Calcul des séquents . . . 14
- 2.5 Extension à la logique des prédicats du premier ordre . . . 18
- 2.6 Sémantique de la logique propositionnelle intuitionniste . . . 21
- 2.7 Extension aux logiques modales . . . 22

3 Rappels sur le λ-calcul **23**
- 3.1 Une théorie des types simples . . . 23
- 3.2 λ-calcul non typé . . . 24
- 3.3 Normalisabilité . . . 25
- 3.4 λ-calcul typé . . . 25

4 Isomorphisme de Curry-Howard **27**
- 4.1 Une correspondance entre types et formules . . . 27
- 4.2 Des preuves aux λ-termes . . . 28

1 Monoïdes, groupes, prégroupes et résiduation

1.1 Monoïdes

Définition 1 *Un* semi-groupe *est un ensemble M muni d'un produit $\star$ associatif, autrement dit vérifiant :*

(M1) $\forall x, y, z \in M, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Un monoïde *est un ensemble M muni d'un produit $\star$ associatif avec un élément neutre. Autrement dit :*

(M1) $\forall x, y, z \in M, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

(M2) $\exists e \in M$*,* $\forall x \in M, x \star e = e \star x = x$

On démontre aisément (exercice) que l'élément neutre est *unique* (supposons qu'il y en ait deux, e et e', alors par définition $e \star e' = e = e'$).
Un parfait exemple de monoïde est donné par l'ensemble de tous les mots sur un alphabet A. Un alphabet A est n'importe quel ensemble fini non vide ($\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, ..., \mathtt{z}\}$ aussi bien que {0, 1, 2, ..., 9} ou seulement {0, 1}, voire seulement $\{|\}$, etc.). Un *mot* d'un alphabet A est une suite finie d'éléments de A. Nous pouvons noter un mot par une suite, par exemple $(\mathtt{a}, \mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{e}, \mathtt{v}, \mathtt{i})$ - sur $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, ..., \mathtt{z}\}$ mais nous préfèrerons écrire un tel mot simplement comme la suite de lettres : `aacevi`.
L'ensemble de tous les mots sur A sera noté A^*.
Sur les mots, une opération naturelle se trouve définie : la *concatenation*. En termes de suites, la concatenation ($\frown$) de la suite σ et de la suite τ dans cet ordre (c'est-à-dire σ en premier puis τ) est la suite réalisée en mettant tous les éléments de τ après le dernier élément de σ, dans l'ordre qu'ils ont dans τ.
Par exemple :

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^\frown(y_1, y_2, ..., y_m) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$$

En termes formels, le résultat est la suite $(z_1, z_2, ..., z_{n+m})$ telle que :

– $\forall i = 1, ..., n : z_i = x_i$
– $\forall j = 1, ..., m : z_{n+j} = y_j$

En notation de mots, nous avons évidemment :

$$x_1 x_2 ... x_n^\frown y_1 y_2 ... y_m = x_1 x_2 ... x_n y_1 y_2 ... y_m$$

autrement dit, par exemple : `ruta`$^\frown$`baga` = `rutabaga`.
L'*associativité* s'exprime par le fait que pour tous mots τ, σ et μ :

$$\tau^\frown(\sigma^\frown\mu) = (\tau^\frown\sigma)^\frown\mu$$

Cette propriété nous permet de parler du produit $\tau^\frown\sigma^\frown\mu$ sans avoir à spécifier la place des parenthèses, puisque le résultat du produit est indépendant de telles places.
Parmi toutes les suites finies d'éléments de A, il y a la suite avec 0 élément, c'est-à-dire *la suite vide*, que nous appellerons simplement *le mot vide* (ou *la chaîne vide*) et que nous noterons ϵ.
Il est facile de montrer que pour tout mot σ sur A, nous avons ; $\epsilon^\frown\sigma = \sigma^\frown\epsilon = \sigma$.
Autrement dit, ϵ est precisément l'élément neutre du monoïde $M = (A^*, ^\frown)$.

1.2 Groupes

On obtient un groupe en ajoutant à la structure de monoïde l'existence d'éléments inverses. Autrement dit, en plus des deux axiomes (M1) et (M2), on a :

(M3) $\forall x \in M, \exists x^{-1}$ *tq.* $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$

On dit que x^{-1} est un élément *inverse* de x.
On démontre aisément (exercice) que pour tout x, l'inverse de x est *unique*.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs muni de l'addition $+$ est un exemple de groupe, de même que $\mathbb{Q} - \{0\}$ (noté aussi $\mathbb{Q}^*$) muni de la multiplication $\times$.
Si on ajoute l'axiome (M4) suivant (*commutativité*), le groupe est dit *commutatif* ou *abélien*.

(M4) $\forall x, y \in M\ x \star y = y \star x$

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}^*$ sont commutatifs.

1.3 Monoïdes ordonnés, groupes ordonnés, protogroupes et prégroupes

Définition 2 *Un semi-groupe M (et afortiori un monoïde ou un groupe) est dit ordonné si M est muni d'une relation d'ordre $\leq$ telle que :*

(M5) $\forall x, y, z \in M,\ x \leq y \Rightarrow z \star x \leq z \star y$ *et* $x \star z \leq y \star z$

Définition 3 *On appelle* protogroupe *un monoïde ordonné où chaque élément a possède un proto-inverse à gauche a^l et un proto-inverse à droite a^r, autrement dit des éléments a^l et a^r vérifiant :*

(M6) $a^l \star a \leq e$ *et* $a \star a^r \leq e$

Remarque : noter que si $a^l \star a = e = a \star a^r$, alors :
$a^l = a^l \star e = a^l \star (a \star a^r) = (a^l \star a) \star a^r = e \star a^r = a^r$
Autrement dit, en ce cas, $a^l = a^r$ et ils sont tous deux identiques à a^{-1}, et on obtient un groupe.

Définition 4 *Un protogroupe est un* prégroupe *si on a, de plus, les relations suivantes :*

(M7) $\forall a \in M\ e \leq a \star a^l$ *et* $e \leq a^r \star a$

Dans un prégroupe, on peut démontrer les relations suivantes :
- $a^{lr} = a$
- $(a \star b)^r = b^r \star a^r$
- $a^{rl} = a$
- $(a \star b)^l = b^l \star a^l$

On a de plus :
- si $a \leq b$ alors $b^l \leq a^l$ et $b^r \leq a^r$

1.4 Correspondances de Galois et résiduation

Nous ne sommes pas toujours en présence d'un élément neutre et nous pouvons avoir seulement, à la base, un semi-groupe ordonné. Cela n'empêche pas de définir des notions analogues à celles de proto-inverses. Il s'agira en réalité de l'analogue de l'opération de division, telle qu'elle est associée au produit dans le cas de l'arithmétique.

Définition 5 *Soit $(M, \leq)$ et $(M', \leq')$ deux ensembles partiellement ordonnés. On appelle* correspondance de Galois *entre ces deux ensembles tout couple de fonctions monotones décroissantes $(f : M \to M', g : M' \to M)$ tel que :*
- $\forall x \in M, \forall y \in M', y \leq' f(x) \Rightarrow x \leq g(y)$

On appelle paire résiduée *tout couple de fonctions monotones croissantes $(f : M \to M', g : M' \to M)$ tel que :*
- $\forall x \in M, \forall y \in M', f(x) \leq' y \Rightarrow x \leq g(y)$

On dit dans ce cas que f (resp. g) est résiduée par rapport à $\leq$ (resp. $\leq'$) et que son application résiduelle est g (resp. f).

On peut ajouter de plus qu'il est possible de définir les notions de correspondance duale de Galois et de paire résiduée duale :

Définition 6 *On appelle* correspondance duale de Galois *tout couple de fonctions monotones décroissantes* $(f : M \to M', g : M' \to M)$ *tel que :*

- $\forall x \in M, \forall y \in M', f(x) \leq' y \Rightarrow g(y) \leq x$

On appelle paire résiduée duale *tout couple de fonctions monotones croissantes* $(f : M \to M', g : M' \to M)$ *tel que :*

- $\forall x \in M, \forall y \in M', y \leq' f(x) \Rightarrow g(y) \leq x$

Proposition 1 *Si* (f, g) *est une correspondance de Galois entre* M *et* M'*, on a :*

- $x \leq g(f(x))$
- $y \leq' f(g(y))$

(Noter que $f(x) \leq' f(x)$ donc $x \leq g(f(x))$, idem pour l'autre inégalité)
Pour les autres notions, nous avons :

Proposition 2 *Si* (f, g) *is une paire résiduée entre* M *et* M'*, on a :*

- $x \leq g(f(x))$
- $f(g(y)) \leq' y$

Nous appelons propriétés de fermeture et d'intérieur les deux énoncés respectifs de la proposition précédente. En effet, $g \circ f$ a les propriétés d'une fermeture, tandis que $f \circ g$ a celles d'un intérieur.
Dans ce qui suit, nous allons utiliser la notion de paire résiduée plutôt que celle de correspondance de Galois, il apparaît néanmoins que les autres notions seraient tout autant susceptibles de donner des constructions similaires à celles que nous allons obtenir.

Définition 7 *Soit* $(M, \star, \leq)$ *un semi-groupe partiellement ordonné. On dit que le produit* $\star$ *est* résidué à gauche *si pour tout* $y \in M$ *l'application* $\star_y : M \to M$ *telle que :*

- $\forall x \in M, \star_y(x) = x \star y$

est résiduée par rapport à $\leq$*, autrement dit s'il existe une application, que nous noterons provisoirement* ${}_y\star$ *telle que pour tout* $y \in M$*, le couple* $(\star_y, {}_y\star)$ *soit une paire résiduée.*

On a alors, par définitions :

Proposition 3 $\star_y(x) \leq z \Rightarrow x \leq {}_y\star(z)$

C'est-à-dire :

$\forall x, y, z, x \star y \leq z \Rightarrow x \leq {}_y\star(z)$

Nous changeons, à ce stade, nos notations et écrivons désormais z/y à la place de ${}_y\star(z)$. Cela nous donne :

$\forall x, y, z, x \star y \leq z \Rightarrow x \leq z/y$

Ajoutons que grâce aux propriétés de fermeture et d'intérieur, nous obtenons :

Proposition 4 $\forall x, y, z \in M, \star_y({}_y\star(z)) \leq z$ *et* $z \leq {}_y\star(\star_y(z))$

autrement dit :

$(z/y) \star y \leq z$ et $z \leq (z \star y)/y$

Nous pouvons faire une construction similaire avec l'application $\star^y$ définie par :

- $\forall x \in M, \star^y(x) = y \star x$

que nous supposons résiduée par rapport à $\leq$. Notons provisoirement ${}^y\star$ l'application résiduelle. Nous avons, par définitions :

Proposition 5 $\forall x, y, z \in M, \star^y(x) \leq z \Rightarrow x \leq {}^y\star(z)$

Autrement dit :
$y \star x \leq z \Rightarrow x \leq {}^y\star(z)$
Changeons la notation, et écrivons $y\backslash z$ au lieu de ${}^y\star(z)$, il vient :
$y \star x \leq z \Rightarrow x \leq y\backslash z$
Les propriétés de fermeture et d'intérieur nous donnent, à leur tour :
- $\forall x, y \in M, x \leq y\backslash(y \star x)$ et
- $\forall y, z \in M, y \star (y\backslash z) \leq z$

Finalement :

Définition 8 *Soit $(M, \star, \leq)$ un semi-groupe partiellement ordonné. Nous dirons que son produit $\star$ est* doublement résidué *s'il est résidué à gauche et à droite par rapport à $\leq$.*

En ce cas, on a en particulier :

$$\forall x, y, z \in M : x \leq z/y \Leftrightarrow x \star y \leq z \Leftrightarrow y \leq x\backslash z$$

2 Rappels de logique : la déduction naturelle

2.1 Présentation de Fitch

Les systèmes de déduction sont des ensembles de règles permettant de construire des preuves. L'un des systèmes correspondant le mieux à notre notion usuelle de preuve en mathématiques est celui qui est attribué à Frederic Fitch, lequel a amélioré une manière de présenter les déductions due au logicien polonais Stanislas Jaśkowski. Ce *style* de preuve consiste à disposer les formules qui sont successivement établies en une colonne, avec les prémisses en haut et la conclusion en bas (sur le schéma de la figure 1, il y a i prémisses et une conclusion). On appelle *déduction principale* l'espace qui figure immédiatement à droite de cette première barre verticale.
Il peut arriver que dans une déduction, on soit amené à faire des hypothèses : en ce cas, les formules qui se déduisent de ces hypothèses ne sont évidemment valides que sous les hypothèses correspondantes. Autrement dit, il existe une règle particulière qui permet d'introduire une hypothèse : elle consiste simplement à l'écrire de manière décalée d'un espace vers la droite et à ouvrir ainsi une *sous-déduction* qui démarre à partir d'elle. Nous pouvons à nouveau faire une hypothèse à l'intérieur de ce nouvel espace, et ce, autant de fois qu'on le désire. Par exemple, le schéma de la figure 2 comporte deux prémisses : A et B, puis une hypothèse C ouvrant une sous-déduction, puis dans cette sous-déduction une nouvelle hypothèse D. Il est toujours possible de répéter une formule déjà démontrée (ou une prémisse ou une hypothèse) à condition bien entendu que cette répétition se fasse dans l'espace approprié, c'est-à-dire à la verticale de la formule répétée ou bien dans une sous-déduction (ou une sous-sous-déduction etc. ainsi récursivement) ouverte après l'inscription de la formule répétée. On utilise pour cela la règle *répéter* (voir figure 3).
Les règles proprement logiques sont celles qui permettent d'utiliser une formule déjà prouvée pour parvenir à un résultat et celles qui permettent d'utiliser la structure de la conclusion pour nous guider dans la recherche d'une preuve. Utiliser une formule déjà prouvée (ou une prémisse ou une hypothèse) revient à *éliminer* son connecteur principal, alors qu'utiliser une conclusion pour nous guider dans la preuve revient à *introduire* son connecteur principal. D'où le fait qu'un système de déduction naturelle contient deux types de règles logiques :
- les règles *d'élimination*
- les règles *d'introduction*

$$
\begin{array}{r|l}
1 & P\ (prem\ 1) \\
2 & Q\ (prem\ 2) \\
\vdots & \vdots \\
i & R\ (prem\ i) \\
\vdots & \vdots \\
n & C\ (conclusion)
\end{array}
$$

FIG. 1 – Forme générale d'une preuve en déduction naturelle

$$
\begin{array}{r|l}
1 & A\ prem\ 1 \\
2 & B\ prem\ 2 \\
3 & \quad \begin{array}{|l} C \\ \hline \end{array} \\
4 & \quad \begin{array}{|l} \\ \end{array} \begin{array}{|l} D \\ \hline \end{array} \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \\ \end{array} \begin{array}{|l} \vdots \end{array}
\end{array}
$$

FIG. 2 – Déduction avec hypothèses

$$
\begin{array}{r|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A & \text{R}, m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
\vdots & \vdots & \\
1 & A & \\
\vdots & \vdots & \\
i & \quad \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} & \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \vdots \end{array} & \\
m & \quad \begin{array}{|l} A \end{array} & \text{R}, 1 \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l} \vdots \end{array} &
\end{array}
$$

FIG. 3 – Règle *répéter*

$$
\begin{array}{r|lll}
\vdots & \vdots & & \\
m & A \wedge B & & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & A & & \wedge\mathrm{E},\, m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|lll}
\vdots & \vdots & & \\
m & A \wedge B & & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & B & & \wedge\mathrm{E},\, m
\end{array}
$$

FIG. 4 – Elimination de la conjonction

$$
\begin{array}{r|lll}
\vdots & \vdots & & \\
m & A & & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & B & & \\
\vdots & \vdots & & \\
p & A \wedge B & & \wedge\mathrm{I},\, m,\, n
\end{array}
$$

FIG. 5 – Introduction de la conjonction

à raison d'un couple de ces règles pour chaque connecteur.

Conjonction
Commençons par la conjonction. Les règles d'élimination et d'introduction sont données respectivement aux figures 4 et 5. La règle d'élimination possède deux variantes, selon qu'on "projette" sur le premier ou sur le deuxième conjoint.

Implication
Réglons immédiatement le cas de l'implication, qui est le connecteur qui nous sera le plus utile dans la suite.
La règle d'élimination (figure 6) est la règle d'inférence la plus connue en logique, à savoir celle du *modus ponens* qui dit qu'à partir de $A \Rightarrow B$ et A, on peut toujours déduire B, on l'appelle aussi règle de détachement. La règle d'introduction (figure 7) reproduit également un processus de preuve auquel nous sommes habitués : prouver $A \Rightarrow B$, c'est *faire l'hypothèse* qu'on a A, et ensuite en déduire qu'on a B. Autrement dit, cette règle nous donne le premier cas où on utilise la notion *d'introduction d'hypothèse*. La disjonction va nous donner un autre cas d'utilisation des hypothèses.

Disjonction
Introduction

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A \Rightarrow B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A & \\
\vdots & \vdots & \\
p & B & \quad\quad \Rightarrow\text{E, } m, n
\end{array}
$$

FIG. 6 – Elimination de l'implication

$$
\begin{array}{l|ll}
1 & \quad \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ B \end{array} & \\
\vdots & & \\
n & & \\
n+1 & A \Rightarrow B & \quad \Rightarrow\text{I, } 1\text{–}n
\end{array}
$$

FIG. 7 – Introduction de l'implication

L'introduction de la disjonction est symétrique par rapport à l'élimination de la conjonction. On a :

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A \vee B & \quad \vee\text{I, } m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & B & \\
\vdots & \vdots & \\
n & A \vee B & \quad \vee\text{I, } m
\end{array}
$$

L'élimination, en revanche, est un peu particulière. Elle repose sur l'idée que $A \vee B$ ne permet d'inférer C que si à la fois A et B (chacun de son côté) permet d'inférer C. Par exemple, si de la buée sur la vitre permet d'inférer que la température extérieure est basse et si aussi le gel sur les arbres permet d'inférer que la température extérieure est basse, alors je peux inférer que la température est basse de la buée sur la vitre *ou* du gel sur les arbres ! Donc pour inférer C à partir de $A \vee B$, je me mets d'abord sous l'hypoths̀e

A, je vérifie qu'on peut déduire C, et je fais la même chose avec B. D'où la règle :

$$
\begin{array}{l|lll}
\vdots & \vdots & & \\
i & A \vee B & & \\
i+1 & \quad & \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} & \\
\vdots & & & \\
j & & & \\
j+1 & \quad & \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} & \\
\vdots & & & \\
k & & & \\
l & C & & \vee\text{E}, i, i+1\text{–}j, j+1\text{–}k
\end{array}
$$

Négation
Les règles pour la négation peuvent se déduire de l'interprfation de cette dernière selon laquelle *nier A* c'est dire que A implique l'absurde. Pour cela, on introduit une constante $\perp$ qui signifie le *faux* et qui ne possède qu'une règle d'élimination (pas de règle d'introduction), laquelle est :

$$
\begin{array}{l|l}
\vdots & \vdots \\
i & \perp \\
i+1 & Q
\end{array}
$$

Cette règle est celle que les logiciens médiévaux appelaient *ex falso quodlibet sequitur* : du faux, on déduit ce qu'on veut. On trouve alors pour la négation les deux règles suivantes :

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
m & A & \\
\vdots & \vdots & \\
n & \neg A & \\
n+1 & \perp & \neg\text{E}, m, n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
1 & \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \perp \end{array} & \\
\vdots & & \\
m & & \\
m+1 & \neg A & \neg\text{I}, 1\text{–}m
\end{array}
$$

Comme on le voit, $\perp$ ne peut apparaître dans une déduction que *via* la règle d'élimination de $\neg$ (puisqu'il n' a pas de règle d'introduction qui lui soit propre), or, grâce à la règle d'introduction de la conjonction, on constate que ce sont exactement les cas où on peut déduire une contradiction $(A \wedge \neg A)$, ainsi $\perp$ a bien le sens d'une contradiction.
Nous avons ainsi obtenu un système pour construire des preuves, mais ce système est-il suffisant pour produire toutes les preuves de la logique classique ? On constatera (exercices) que non. En particulier, il lui manque deux schémas d'inférence qu'on utilise couramment en logique classique : la *loi du tiers exclu* et la règle de *double négation*. Intuitivement, ce n'est pas étonnant : prouver que l'on a le tiers exclu,

c'est-à-dire $A \vee \neg A$ ne pourrait se faire qu'en utilisant la règle $\vee\ I$, or celle-ci suppose que soit connu soit A soit $\neg A$, or évidemment quand on utilise la loi du tiers exclu habituellement on ne sait pas lequel des deux termes est valide ! On peut d'autre part montrer que si on ajoute la règle de double-négation au système, alors la loi du tiers-exclu est prouvable (et réciproquement d'ailleurs), où la loi de double négation peut se formuler comme suit :

$$\begin{array}{l|ll} \vdots & \vdots & \\ n & \neg\neg A & \\ n+1 & A & \neg\neg\text{E}, n \end{array}$$

Si on n'ajoute pas explicitement cette dernière règle on obtient donc un sous-système de la logique classique : ce qu'on appelle la *logique intuitionniste*, appellation qui se justifie si on sait que les tenants de l'intuitionnisme en mathématiques (notamment son grand maître Brouwer) refusaient justement l'utilisation de la loi du tiers exclu.
Nous allons revenir sur la déduction naturelle en logique intuitionniste au paragraphe suivant afin de montrer que les preuves dans cette logique ont la propriété agréable de pouvoir être disposées de manière arborescente (ce qui justifie entre autres l'utilité des calculs intuitionnistes en linguistique, quand on sait la faveur dont y jouissent justement les arbres !).

2.2 Déduction naturelle sous la forme d'arbres

Une présentation de la déduction naturelle en forme d'arbres sera particulièrement utile quet nous l'utiliserons pour représenter des dérivations de phrases (qui, toutes, se termineront par un seul symbole : S). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les règles suivantes sont simplement d'autres manières d'exprimer les règles d'introduction et d'élimination des différents connecteurs. Nous précisons seulement quelques points.

Règles d'introduction

– conjonction :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,[\wedge\ I]$$

– disjonction :

$$\frac{A}{A \vee B}\,[\vee_1\ I] \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\,[\vee_2\ I]$$

– implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ I]$$

Noter ici que l'hypothèse A est une formule que (du point de vue classique et intuitionniste[1]) l'on utilise un nombre indéterminé de fois. Elle peut être utilisée une fois, deux fois, ... n fois, y

[1]Mais pas du point de vue linéaire, [**?**]

compris 0 fois, *ce qui ne l'empêche pas d'être déchargée*, ce qui est la source du théorème classique et intuitionniste qui s'exprime par $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, dont voici la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B \Rightarrow A}\,[\Rightarrow\ I]}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,[\Rightarrow\ I]$$

Noter la différence entre les deux applications de la règle $[\Rightarrow\ I]$: la deuxième application décharge l'hypothèse A qui a été utilisée une fois (pour poser A) alors que la première décharge l'hypothèse B... qui n'a jamais été utilisée.
On appelle habituellement *lien* l'association que l'on peut faire entre l'hypothèse faite et l'occurence de la règle $[\Rightarrow\ I]$ qui la décharge. On utilise pour rendre explicite un tel lien une *coindexation*, d'où la complétion suivante du schéma de la règle :

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ I]^i$$

Si l'hypothèse a été utilisée n fois, on dira que le lien est de cardinalité n. Ainsi, lorsque l'hypothèse n'est pas utilisée dans la preuve, aura-t-on bel et bien un lien, mais de cardinalité 0 !
Voici une preuve avec un lien de cardinalité 2 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \qquad [A]^1}{A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ E]}{B}\,[\Rightarrow\ E]}{A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ I]^1$$

Cette preuve nous assure que si on peut prouver $A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, alors on peut prouver $A \Rightarrow B$. L'hypothèse A (indexée 1) est utilisée deux fois de suite (au cours des deux applications de la règle $[\Rightarrow\ E]$) mais déchargée une seule fois.

– négation :

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,[\neg\ I]^i$$

Règles d'élimination

– conjonction :

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\,[\wedge_1\ E] \qquad\qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,[\wedge_2\ E]$$

– disjonction :

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,[\vee E]$$

– implication

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\,[\Rightarrow\ E]$$

– négation

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp}\,[\neg\, E]$$

– $\perp$

$$\frac{\perp}{B}\,[\perp E]$$

Si nous voulons étendre le système à toute la logique classique, il faudra ajouter soit la règle d'élimination de la double négation :

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,[\neg\neg\, E]$$

soit celle du tiers exclu :

$$\frac{}{A \vee \neg A}\,tiers\ exclu$$

2.3 Présentation en forme de séquents

La présentation sous cette forme est due à Gentzen, il ne faut pas la confondre avec le *calcul des séquents* proprement dit, que nous aborderons plus loin. Un *séquent* est une relation de déduction qui existe entre un ensemble de formules et une formule particulière. La forme générale en est donc :

$$\Gamma \vdash A$$

où A est une formule et Γ un ensemble de formules.
Nous admettons un premier séquent valide, à titre *d'axiome* (qu'on peut aussi appeler règle "d'identité") :

$$\frac{}{\Gamma \cup \{A\} \vdash A}$$

qui exprime simplement le fait que si A figure dans les prémisses alors évidemment on peut la prendre comme conclusion. Les règles logiques deviennent :

Règles d'introduction

– conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,[\wedge\, I]$$

– disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,[\vee\, I]_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,[\vee\, I]_2$$

– implication

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,[\Rightarrow\ I]$$

– négation

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,[\neg\, I]$$

Règles d'élimination

– conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,[\wedge\, E]_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,[\wedge\, E]_2$$

– disjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

– implication :

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

– négation :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}$$

– $\bot$:

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash B}$$

– double négation :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

– Tiers exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}$$

Il y a de plus une règle que nous sommes amenés à formuler, qui se trouvait à l'état implicite dans les deux premières présentations de la déduction naturelle, c'est la règle dite *de coupure*. Il est clair que, par exemple dans la présentation en arbres, si une déduction γ utilise l'hypothèse $[A]$ et si une autre, δ, arrive à la conclusion A, nous pouvons "brancher" l'une sur l'autre et obtenir une déduction composée qui part des prémisses de δ et arrive à la conclusion de γ en faisant se superposer la conclusion A et l'hypothèse A.

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad \mapsto \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array}$$

Du point de vue du calcul des séquents, il nous faut donner explicitement cette règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}\, cut$$

2.4 Calcul des séquents

Dans sa recherche d'une preuve de la complétude de la logique des prédicats (dit "Théorème de complétude de Gödel") de 1930, Gentzen utilise un système qui s'apparente à un calcul sur des tableaux. Il s'agit du calcul des séquents. A l'origine, en logique classique donc, les séquents sont vus comme deux listes finies de formules séparées par une barre verticale, à gauche : des formules vraies, à droite des formules fausses. Par exemple, prouver une formule implicative du genre : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, c'est prouver qu'une situation qui la rendrait fausse ne peut pas exister (recèlerait une contradiction). Pour cela, on part donc de l'hypothèse absurde que $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est faux, ce qu'on écrit :

$$\mid A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

On sait immédiatement que pour que $X \Rightarrow Y$ soit faux, il faut et il suffit que X soit vrai et que Y soit faux, de la situation précédente on est donc ramené à :

$$A \mid B \Rightarrow A$$

puis, pour les mêmes raisons, à :

$$A, B \mid A$$

mais cette situation est contradictoire puisqu'on a en même temps A vrai et A faux. Cette "démonstration" peut être présentée de la manière suivante, où les différentes étapes du raisonnement se lisent *du bas vers le haut* :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A, B \mid A}\, stop!}{A \mid B \Rightarrow A}}{\mid A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}$$

Implicitement, elle a utilisé une règle :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

(où on a réécrit "$\vdash$" la barre verticale) qui est celle que nous avons déjà vue en déduction naturelle (introduction de $\Rightarrow$), ici avec une autre lecture.
Autre cas : supposons que nous voulions prouver la relation de déduction :

$$C, C \Rightarrow A, A \Rightarrow B \vdash B$$

Nous pourrions aussi procéder "par l'absurde" et dire : supposons que cela soit faux, autrement dit qu'il existe une assignation de valeurs de vérité telle que $C, C \Rightarrow A, A \Rightarrow B$ soient vrais et B faux. Alors en prenant $A \Rightarrow B$ comme formule active, nous pourrons dire que cette formule est vraie dans deux cas (non exclusifs) : A est faux ou B est vrai, ce qui divise la recherche de preuve en deux voies, l'une pour laquelle A est faux, l'autre pour laquelle B est vrai. On peut écrire ceci :

$$\frac{C, C \Rightarrow A \vdash B, A \qquad C, C \Rightarrow A, B \vdash B}{C, C \Rightarrow A, A \Rightarrow B \vdash B}$$

Le séquent en haut à droite recèle une contradiction évidente puisque B y est à la fois vrai et faux, on peut donc abandonner cette branche. En ce qui concerne le séquent en haut et à gauche, il faut aller un peu plus loin. Considérons cette fois $C \Rightarrow A$ comme active, nous avons une nouvelle bifurcation :

$$\frac{C, A \vdash B, A \qquad C \vdash B, A, C}{C, C \Rightarrow A \vdash B, A}$$

mais cette fois, nous avons deux branches recélant chacune une contradiction : dans l'une A est à la fois vrai et faux, et dans l'autre, C est à la fois vrai et faux. La recherche se termine donc. La règle utilisée, pour la logique classique, est cette fois :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$$

Cette règle ne ressemble pas à une règle de déduction naturelle. C'est néanmoins une règle d'introduction de $\Rightarrow$ mais *à gauche*. Le calcul des séquents de Gentzen est donc un calcul dont les règles sont toutes des règles d'introduction, mais soit à droite, soit à gauche. Il possède également des axiomes : tout séquent de la forme $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ est en effet terminal. Il possède de plus la **règle de coupure**, que nous avons abordée à la section précédente.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad A, \Gamma' \vdash \Theta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Theta}$$

Il possède encore d'autre règles, dites **règles structurelles**. Ces règles sont légitimées par le fait que désormais, ce ne sont plus des *ensembles* de formules que nous avons à gauche ou à droite du séparateur $\vdash$, mais des *listes* de formules. Comme on sait, si les ensembles $\{a, b, a, c, c\}$ et $\{a, b, c\}$ sont égaux (deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments), en revanche, les **listes** $[a, b, a, c, c]$ et $[a, b, c]$ ne le sont pas (une liste est un ensemble totalement ordonné d'occurrences de termes). Pour que les listes $[a, c, c]$ et $[a, c]$ soient rendues équivalentes, il faut ajouter une règle permettant de contracter deux occurrences qui se suivent en une seule, pour que les listes $[a, b]$ et $[b, a]$ le soient, il faut ajouter une règle permettant de les permuter.
La règle d'affaiblissement montre clairement que, si la virgule en partie gauche doit s'interpréter comme une **conjonction**, en partie droite, elle doit s'interpréter comme une **disjonction**.

Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

Permutation :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash B, A, \Delta}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

Règles d'identité

Axiome

$$A \vdash A$$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,[cut]$$

Les règles logiques sont :

négation

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,[\neg L] \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,[\neg R]$$

Conjonction

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,[\wedge_1 L] \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,[\wedge_2 L]$$

variante :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,[\wedge L]$$

Version multiplicative

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\,[\wedge R]$$

Version additive

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,[\wedge R]$$

Disjonction

Version multiplicative

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}\,[\vee L]$$

Version additive

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}[\vee L]$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}[\vee_1 R] \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}[\vee_2 R]$$

variante :

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}[\vee R]$$

Implication

Version multiplicative

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}[\Rightarrow L] \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}[\Rightarrow R]$$

Version additive

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}[\Rightarrow L]$$

Les règles de négation s'interprètent facilement comme des *changements de côté* pour la formule qui est soumise à négation. Notons alors qu'on obtient facilement une preuve du tiers-exclu, ce qui montre que ce calcul des séquents est bien le calcul **classique**.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}[Ax]}{\vdash A, \neg A}[\neg R]}{\vdash A \vee \neg A}[\vee R]$$

Les versions additive et multiplicative sont équivalentes, comme on le montre facilement dans le cas de la conjonction.
Au moyen d'autant d'applications de la règle d'affaiblissement que nécessaire, nous prouvons :

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash A, \Delta \\ \hline\hline \Gamma, \Gamma' \vdash A, \Delta, \Delta' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} \Gamma' \vdash B, \Delta' \\ \hline\hline \Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta' \end{array}$$

on utilise ensuite la règle additive pour prouver :

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash A, \Delta, \Delta' \quad \Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}$$

2- Montrons que la version multiplicative implique l'additive :
Nous avons :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta}$$

au moyen de la règle multiplicative. Ensuite nous utilisons permutation et contraction autant de fois que nécessaire pour obtenir :

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

On vérifiera que la version **intuitionniste** s'obtient simplement en restreignant le calcul à une contrainte structurelle forte :

au plus une formule en partie droite

(le cas d'aucune formule en partie droite étant équivalent au cas où ne figure en partie droite que le symbole de l'absurde, $\perp$).

L'abandon des règles structurelles (sauf la permutation) conduit à la logique **linéaire**. En ce cas, les versions multiplicative et additive ne coïncident plus, ce qui permet de donner deux versions de $\wedge$ et deux versions de $\vee$:

- version multiplicative : $\wedge \mapsto \otimes$, $\vee \mapsto \wp$
- version additive : $\wedge \mapsto \&$, $\vee \mapsto \oplus$

La négation $^\perp$ se réduit au changement de côté.
En ce cas, si on définit l'implication $A \multimap B$ par :

$$A \multimap B \equiv A^\perp \wp B$$

on obtient une implication particulière qui obéit aux règles :

$$\frac{\Theta \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Theta, A \multimap B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} [\multimap\ L] \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta} [\multimap\ R]$$

Les propriétés fondamentales du calcul des séquents sont les suivantes :

1. **propriété de la sous-formule** : pour toute preuve n'utilisant pas la règle de coupure, à chaque pas, l'ensemble des sous-formules des prémisses de la règle utilisée est strictement inclus dans celui de la conclusion (autrement dit, aucune formule n'est à inventer quand on passe du bas vers le haut),
2. **élimination des coupures** : toute preuve avec coupure peut être transformée en une preuve sans coupure du même résultat, autrement dit, la règle de coupure est redondante dans le système.

Nous reviendrons sur l'utilisation de ces propriétés au chapitre sur le calcul de Lambek. Nous ébaucherons alors une démonstration du théorème d'élimination des coupures appliqué au cas particulier de ce calcul. Ajoutons que la démonstration du théorème d'élimination des coupures est *constructive*, autrement dit, il y a moyen d'en extraire un algorithme qui effectue la transformation d'une preuve en une autre.

2.5 Extension à la logique des prédicats du premier ordre

Règles d'introduction
$[i\ \forall]$: Si nous nous contentions de domaines finis (ayant un nombre fini d'éléments), nous pourrions dire simplement que $\forall x A(x)$ est vrai si chaque fois que nous remplaçons x par le nom d'un individu

du domaine, nous obtenons une proposition vraie. En ce cas, si par exemple le domaine est : $D = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, cela revient à trouver une preuve de la conjonction $A(c_1) \wedge A(c_2) \wedge ... \wedge A(c_n)$ où $c_1, ..., c_n$ sont les noms de $i_1, ..., i_n$, ou, en abrégé, une preuve de $\bigwedge_{i=1...n} A(c_i)$. Il suffirait d'appliquer la règle d'introduction de la conjonction. On peut résumer cette observation en remarquant ainsi qu'un $\forall$ peut être vu comme un $\bigwedge$.
Seulement, dans le cas d'un domaine infini (ou... trop grand !), nous devons passer par une autre méthode. L'idée est d'utiliser en ce cas une sorte d'individu *générique*, que nous représentons par une variable x. Pour être générique, ou, dit-on aussi : *quelconque*, cet individu ne doit être doté d'aucune propriété particulière. x doit donc être une variable ne figurant dans aucune hypothèse qu'on aurait pu introduire au préalable. Néanmoins, il peut se faire que x figure dans une hypothèse, mais en ce cas il s'agit d'une hypothèse qui est justement déchargée au moment de prouver $A(x)$. On écrit :

$$\dfrac{\begin{matrix} . \\ . \\ . \\ A(x) \end{matrix}}{\forall x A(x)}$$

Condition : au cas où on utilise des hypothèses auxiliaires pour démontrer $A(x)$, x est une variable libre qui n'apparaît dans aucune de ces hypothèses, autrement dit c'est une variable qui n'a jamais encore été utilisée (on dit que c'est une variable *fraîche*). Autrement dit encore, *la variable qui devient liée au moment de l'utilisation de cette règle n'est active dans aucune hypothèse non encore déchargée*. Cette règle revient à dire : *soit un x quelconque*, prouvons que A est vrai de x.
Exemple :
Prouvons que $\forall x(A(x) \Rightarrow A(x))$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} [A(x)] \\ A(x) \end{matrix}}{A(x) \Rightarrow A(x)}}{\forall x(A(x) \Rightarrow A(x))}$$

Commentaire : on fait l'hypothèse que l'on a $A(x)$ pour un x quelconque, on en déduit évidemment que l'on a $A(x)$, on peut donc utiliser la règle d'introduction de l'implication, ce qui donne $A(x) \Rightarrow A(x)$. A ce stade, l'hypothèse contenant x est déchargée, on peut utiliser la règle d'introduction de $\forall$ qui va justement lier la variable x, qui n'est désormais active dans aucune hypothèse.

$[i\ \exists]$: Là encore, si nous étions dans un domaine fini, nous pourrions simplement dire qu'il suffit de trouver une valeur dans ce domaine pour laquelle on a une preuve de $A(x)$. En ce cas, l'existentielle $\exists x A(x)$ correspond à une disjonction, on cherche une preuve de $A(c_1) \vee A(c_2) \vee ... \vee A(c_n)$, autrement écrit $\bigvee_{i=1...n} A(c_i)$. Il suffirait d'appliquer la règle d'introduction de la disjonction. On peut résumer cette observation en remarquant ainsi qu'un $\exists$ peut être vu comme un $\bigvee$.
De fait, il suffit de trouver un individu particulier permettant de prouver A pour avoir une preuve de $\exists x A(x)$, nous pouvons donc dire qu'une preuve de $\exists x A(x)$ consiste dans le couple formé par un individu bien particulier du domaine D et une preuve de A pour cet individu. On peut trouver cet individu par son nom (d'après nos hypothèses) mais on peut le trouver aussi par une méthode. Dans ce dernier cas, on peut supposer qu'il y a un terme t pour le désigner même si nous ne savons pas exactement qui il est ! D'où la

règle, avec sa condition :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A(t)\end{array}}{\exists x A(x)}$$

Condition : t est un terme. Ce terme doit être *libre* pour x. Qu'est-ce que cela veut dire ? Tout simplement qu'il ne doit pas s'introduire, au cours de l'application de la règle, un liage de variable intempestif non voulu ! Par exemple imaginons que t soit une variable y et que $A(t)$ soit $A(y) = (y \neq x)$, alors la conclusion serait : $\exists x\ (x \neq x)$! Autrement dit, du fait qu'un nombre y est différent d'un nombre x, on déduirait qu'il existe un nombre différent de lui-même, ce qui est absurde. Ici y n'est pas libre pour x signifie qu'on ne peut pas remplacer y par x dans l'expression sans lier une variable distincte de y qui jusqu'ici était libre. On peut toutefois substituer y par z dans cette expression car y est libre pour z. On obtiendrait : $\exists z\ (z \neq x)$. Et même y par lui-même car y est libre pour y, on obtiendrait : $\exists y\ (y \neq x)$.

Règles d'élimination
$[e\ \forall]$: Evidemment si nous avons une preuve de $\forall x A(x)$, par définition, pour chaque individu i, nous avons une preuve de $A(c_i)$ et plus généralement, pour toute constante c, nous avons une preuve de $A(c)$, et de même pour toute variable. D'où la règle :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t)}$$

où t est un terme quelconque, là aussi *libre pour* x.

$[e\ \exists]$: La règle d'élimination de $\exists$ ressemble nécessairement à celle du $\vee$. Intuitivement, si partant de n'importe quelle hypothèse $A(y)$, où, comme dans le cas de la règle $[i\ \forall]$, y apparaît comme variable libre non déjà présente dans une hypothèse auxiliaire, on arrive toujours à la même conclusion C, on pourra déduire C de $\exists x A(x)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x A(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(y)]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}$$

Exemple : démontrons que $(\exists x A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\exists x A(x) \wedge B(x)]\\ \\ \exists x A(x) \wedge B(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(y) \wedge B(y)]\\ A(y)\\ \exists x A(x)\end{array}}{\exists x A(x)}}{(\exists x A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)}$$

Commentaire : sous chaque hypothèse $A(y) \wedge B(y)$, $A(y)$ peut évidemment se déduire, d'où l'on déduit la formule $\exists x A(x)$. La règle $[e\ \exists]$ permet de décharger chacune de ces hypothèses (comme dans le cas de l'élimination de la disjonction) et de dire que ce qu'on a prouvé sous chacune d'elles se déduit simplement de l'existence d'un x (sans qu'on sache forcément lequel) tel que $A(x) \wedge B(x)$.

2.6 Sémantique de la logique propositionnelle intuitionniste

Puisque la logique intuitionniste est un sous-système strict de la logique classique, on ne peut pas lui donner une interprétation en termes de valeurs de vérité. Néanmoins, Saül Kripke lui a donné une sémantique au terme de laquelle une proposition démontrable s'interprète comme une proposition "sue". Evidemment, "savoir A *ou* B" c'est savoir A ou savoir B, donc savoir A *ou* $\neg A$, c'est vraiment savoir l'un ou savoir l'autre. Si on ne sait ni l'un ni l'autre, on ne peut pas se prononcer sur leur disjonction, car on peut tout simplement ne pas savoir A tout en ne sachant pas forcément $\neg A$. On notera, d'un point de vue linguistique, la différence qu'il y a entre "savoir *que* A *ou* B" et "savoir A *ou* B" , dans le premier cas, le "ou" est classique : on "sait " que c'est soit l'un soit l'autre, alors que dans le second le "ou" est intuitionniste, "savoir A *ou* B" s'entend comme "savoir A" ou "savoir B".

Définition 9 *On appellera structure de Kripke la donnée d'un triplet $(w_0, W, \leq)$ où W est un ensemble, $w_0 \in W$ et $\leq$ est un préordre sur W.*

Définition 10 *Etant donné un ensemble P de lettres propositionnelles, on appellera valuation sur P toute application $\phi : P \to \wp(W)$ telle que si $h \in \phi(p)$ alors si $h \leq h'$, $h' \in \phi(p)$.*

Autrement dit (voir le cours sur les ensembles et les algèbres de Boole), à toute lettre propositionnelle p, est associé par une valuation, un *filtre* sur W.
Comme dans le cas de la logique classique, on peut étendre toute valuation ϕ à toutes les formules construites sur l'ensemble P donné de lettres propositionnelles, de telle sorte que :

1. $\phi(A \wedge B) = \phi(A) \cap \phi(B)$
2. $\phi(A \vee B) = \phi(A) \cup \phi(B)$
3. $h \in \phi(A \Rightarrow B)$ ssi pour tout h' tel que $h \leq h'$, $h' \notin \phi(A)$ ou $h' \in \phi(B)$
4. $h \in \phi(\neg A)$ ssi pour tout h' tel que $h \leq h'$, $h' \notin \phi(A)$

On peut facilement interpréter les éléments $w \in W$ comme des *états* (états de connaissance). La relation $\leq$ structure les états. Dire que $h \leq h'$ c'est dire que l'état h' est accessible à partir de h (il fait partie du "futur" de h). On passe de h à h' par accroissement de l'information disponible. $\phi(A)$ pour une formule A donnée, représente l'ensemble des états où la "vérité" de A est connue, ou, plus exactement, où la vérité de A a été établie au moyen d'une preuve. Le fait que $\phi(A)$ soit un filtre entraîne comme conséquence que si A est une vérité établie dans un état h, A l'est encore dans tous les états accessibles à partir de h. Autrement dit, on fait l'hypothèse d'une croissance monotone et continue des connaissances. (On ne perd jamais de savoir). Dans le cas de la troisième clause (pour l'implication), il est dit que si $A \Rightarrow B$ a été établie par une preuve dans l'état h, alors dans cet état, mais aussi dans tous les états futurs accessibles, ou bien A n'est pas (encore) établie, ou bien B l'est, autrement dit quand A est établie par une preuve, aussitôt, B l'est aussi (on ne pourra pas établir A sans établir B). La quatrième clause dit que $\neg A$ n'est établie dans un état h que si on est sûr que jamais (dans aucun état futur) A ne sera établie par une preuve.
Le théorème de complétude de Kripke pour la logique propositionnelle intuitionniste s'énonce ainsi :

Théorème 1 *A est un théorème de la logique propositionnelle intuitionniste si et seulement si pour toute structure $(w_0, W, \leq)$ et toute valuation ϕ sur cette structure, $w_0 \in \phi(A)$ (on dit en ce cas que A est valide).*

Exemple 1 *Démontrons que $A \Rightarrow A$ est valide.*
Considérons une structure quelconque $(w_0, W, \leq)$ et une valuation quelconque ϕ. Supposons que $A \Rightarrow A$ ne soit pas valide. Alors on aurait : $w_0 \notin \phi(A \Rightarrow A)$. Donc il existerait au moins un état w tel que $w_0 \leq w$ tel que $w \in \phi(A)$ et $w \notin \phi(A)$, ce qui est contradictoire.

Exemple 2 *Démontrons que $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est valide.*
Même démarche. Considérons une structure quelconque $(w_0, W, \leq)$ et une valuation quelconque ϕ. Supposons que $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ ne soit pas valide. Alors on aurait : $w_0 \notin \phi(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. Donc il existerait au moins un état w tel que $w_0 \leq w$ tel que $w \in \phi(A)$ et $w \notin \phi(B \Rightarrow A)$, Mais $w \notin \phi(B \Rightarrow A)$ implique l'existence d'un état w' tel que $w \leq w'$ et tel que $w' \in \phi(B)$ et $w' \notin \phi(A)$, or, la condition de filtre fait que $w' \in \phi(A)$, d'où à nouveau une contradiction.

Démontrer qu'une formule n'est pas valide requiert simplement la construction d'un seul *contre-modèle*, c'est-à-dire d'une structure $(w_0, W, \leq)$ et d'une valuation ϕ pour laquelle la formule n'est pas valide ($w_0 \notin \phi(A)$).
Soit par exemple, $W = \{w_0, w_1\}$, $\leq$ définie par : $w_0 \leq w_1$ et ϕ tel que $\phi(p) = \{w_1\}$. Dans ce modèle, $w_0 \notin \phi(\neg p)$, car si tel n'était pas le cas, on aurait : $w_0 \in \phi(\neg p)$, ce qui entraînerait que $w_1 \notin \phi(p)$, ce qui n'est pas le cas. Donc $w_0 \notin (\phi(p) \cup \phi(\neg p)) = \phi(p \vee \neg p)$. Ainsi le tiers-exclu n'est pas valide.

EXERCICE 1 *Avec la même structure, réfuter $\neg\neg p \Rightarrow p$*

EXERCICE 2 *Démontrer que la structure suivante : $W = \{w_0, w_1, w_2\}$, avec $w_0 \leq w_1$ et $w_0 \leq w_2$ permet de réfuter $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$ ainsi que $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$.*

2.7 Extension aux logiques modales

La notion d'état de connaissance introduite au paragraphe précédent peut être étendue à la notion de *monde possible*. W s'interprète comme un ensemble de mondes possibles, w_0 comme le monde actuel (qui n'est pas forcément nécessaire) et $\leq$ comme relation d'accessibilité entre les mondes. $w \leq w'$ si et seulement si le monde w' est accessible à partir de w. La relation d'accessibilité peut avoir diverses propriétés selon le type de logique modale que l'on souhaite définir. Une valuation ϕ est alors une fonction qui à toute lettre propositionnelle p associe un ensemble de mondes possibles $\phi(p)$ (ce n'est plus nécessairement un filtre) et on l'étend à toute formule d'une manière analogue à ce qui a été fait pour la logique intuitionniste, mais en plus, nous avons désormais la possibilité d'introduire de nouveaux connecteurs ($\Box$ et $\Diamond$). D'où un enrichissement de la syntaxe :
$S \rightarrow (S \wedge S)|(S \vee S)|(S \Rightarrow S)|(\neg S)|(\Box S)|(\Diamond S)|p|q|r|....$
ϕ définie sur les lettres propositionnelles peut alors être étendue de la manière suivante :

1. $\phi(A \wedge B) = \phi(A) \cap \phi(B)$
2. $\phi(A \vee B) = \phi(A) \cup \phi(B)$
3. $\phi(A \Rightarrow B) = \overline{\phi(A)} \cup \phi(B)$
4. $\phi(\neg A) = \overline{\phi(A)}$
5. $w \in \phi(\Box A)$ ssi $\forall w', w \leq w' \Rightarrow w' \in A$
6. $w \in \phi(\Diamond A)$ ssi $\exists w', (w \leq w') \wedge (w' \in A)$

Une proposition A est dite vraie dans le monde w si et seulement si $w \in \phi(A)$. On voit que les clauses (5) et (6) signifient respectivement que $\Box A$ est vraie dans le monde w si et seulement si A est vraie dans tous les mondes accessibles à partir de w et que $\Diamond A$ est vraie dans le monde w si et seulement s'il existe un monde accessible à partie de w dans lequel A est vraie.

Proposition 6 *Si la relation d'accessibilité est réflexive, alors on a : $\Box A \Rightarrow A$.*

Démonstration : dire que $\Box A$ est vrai dans un monde w, c'est dire que A est vrai dans tout monde accessible à partir de w, or si la relation d'accessibilité est réflexive, w est accessible à partir de lui-même, on en déduit donc que A est vrai dans w.

Proposition 7 *Si la relation d'accessibilité est réflexive et symétrique (autrement dit est un préordre), alors on a :* $\Box\Box A \equiv \Box A$.

Démonstration : démontrons que pour toutes les structures et toutes les valuations, $w \in \Box\Box A \Leftrightarrow w \in \Box A$. Notons que $w \in \Box\Box A$ signifie que dans tout monde w' accessible à partir de w, $\Box A$ est vraie, autrement dit que dans tout monde w'' accessible à partir de w', A est vraie. Donc cela signifie que A est vraie dans tout monde accessible en deux étapes.
1) $w \in \Box\Box A \Rightarrow w \in \Box A$: découle de la proposition précédente.
2) $w \in \Box A \Rightarrow w \in \Box\Box A$: si A est vraie dans tout monde accessible en une étape à partir de w, alors A est vraie dans tout monde accessible en deux étapes (puisque la relation est transitive et que donc tout ce qui est accessible en deux étapes l'est en une seule !).

On peut alors voir le rapport avec la logique intuitionniste. Supposons la traduction suivante de la LPI vers une logique modale :

- $p^t = \Box p$
- $(A \vee B)^t = A^t \vee B^t$
- $(A \wedge B)^t = A^t \wedge B^t$
- $(A \Rightarrow B)^t = \Box(A^t \Rightarrow B^t)$
- $(\neg A)^t = \Box\neg A^t$

Le principe de cette traduction est le suivant : supposons que nous voulions évaluer la validité d'une formule intuitionniste A. Nous la traduisons alors selon cette procédure récursive en une formule A^t qui est une formule de logique modale. Après quoi, on regarde si A^t est valide pour cette logique modale. Supposons également que l'on impose que la relation d'accessibilité soit réflexive et transitive (autrement dit soit un préordre). La logique ainsi définie au moyen des opérateurs $\Box$ et $\Diamond$, avec les règles de valuation ci-dessus, et une relation d'accessibilité réflexive et transitive, est baptisée dans la littérature "logique S4". On prouve que :

Théorème 2 *A valide en LPI si et seulement si A^t est valide en logique S4*

S4 correspond à une logique modale où $\Box$ s'interprète comme indiquant la *nécessité*. En ce cas, $\Diamond$ exprime la *possibilité*. On vérifie facilement :

Proposition 8 $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

En effet, dire qu'il est possible que A signifie qu'il n'est pas nécessaire que non A. On notera que, en changeant les propriétés de la relation d'accessibilité, on peut obtenir d'autres interprétations de $\Box$ et $\Diamond$. Par exemple, si la relation n'est pas réflexive, il est faux que A soit nécessairement vrai dans w quand $\Box A$ l'est. C'est un cas qui correspond assez bien à l'interprétation dite *déontique* des opérateurs modaux ($\Box$ s'interprète comme "il est *obligatoire* que" et $\Diamond$ comme "il est *permis* que") : le fait que quelque chose soit obligatoire n'implique pas que ce soit le cas dans le monde actuel ! (même s'il est obligatoire pour un automobiliste de s'arrêter au rouge, cela n'entraîne pas qu'il le fasse.).

3 Rappels sur le λ-calcul

3.1 Une théorie des types simples

Comme nous le verrons au chapitre ***, R. Montague catégorise les expressions linguistiques selon ce qu'on appelle leur *type sémantique*. Chaque expression est ainsi supposée appartenir à au moins un type. On suppose de plus que les expressions de même catégorie syntaxique appartiennent aux mêmes types. Ces types sémantiques sont construits à partir d'un ensemble de types primitifs A selon les règles suivantes :

$$\forall t \in A,\ t\ est\ un\ type\ (t \in Typ) \tag{1}$$

$$\forall \alpha, \beta \in Typ, (\alpha \rightarrow \beta) \in Typ \tag{2}$$

A l'origine, la notion de type a été introduite en logique pour éliminer les paradoxes, dont le plus fameux est celui de Russell. La notion de type que nous utilisons est due à A. Church [**?**], mais trouve ses racines chez le philosophe Husserl, puis au sein du courant représenté par la logique polonaise des années 1930. Pour Church, l'ensemble A consiste en deux types primitifs : i (le type des individus) et o (celui des propositions). Pour Montague et la plupart des applications linguistiques, ces types sont notés **e** et **t**. Le paradoxe de Russell était du au fait que, dans le système de Frege, un prédicat pouvait s'appliquer à n'importe quel objet, y compris à un autre prédicat et donc y compris à lui-même, ce qui donnait droit de cité à une expression comme $\Phi(\Phi)$. Pour éviter ce piège, Russell suggéra d'utiliser des types afin de rendre ce genre d'expression mal formée. Pour lui, il suffisait d'assigner des types hiérarchisés aux expressions, de sorte que, partant d'entités de type 0 (par exemple les éléments de l'univers), on puisse obtenir des entités de type 1 (par exemple les ensembles d'entités de type 0), puis de type 2 (ensembles d'entités de type 1) et ainsi de suite, les entités de type i donnant naissance aux entités de type $i + 1$ simplement par construction d'ensembles. Dans une telle hiérarchie, on ne pouvait avoir de relation d'appartenance $x \in y$ que si x était d'un type i et y d'un type $i + 1$. Le point de vue hérité de Husserl et que l'on retrouve chez Church est légèrement différent et repose sur la fonctionnalité. On assigne à chaque expression un type selon la définition (2) ci-dessus et on stipule qu'un prédicat de type $\alpha \rightarrow \beta$ ne peut s'appliquer qu'à un objet de type α, donnant ainsi un objet de type β. Church utilisa alors le λ-calcul pour représenter les fonctions elles-mêmes, et surtout, le mécanisme de substitution d'une valeur à une variable au sein d'une fonction, comment par exemple rendre compte des substitutions correctes des valeurs a et b aux variables x et y dans une expression $F(x, y)$.

3.2 λ-calcul non typé

Définition 11 *Les λ-termes sont définis selon :*

$$M := x \mid (M\ M) \mid \lambda x.M \tag{3}$$

c'est-à-dire :

- *toute variable est un λ-terme*
- *si M et N sont des λ- termes, alors $(M\ N)$ est un λ- terme,*
- *si M est un λ-terme et x une variable, alors $\lambda x.M$ est un λ-terme.*
- *il n'y a pas d'autres λ-termes que ceux construits par ces trois clauses.*

Par exemple, $((M_1\ M_2)\ M_3)$ est un λ-terme si M_1, M_2 et M_3 en sont. En admettant l'assocativité à gauche, cette expression peut être simplement écrite comme $M_1\ M_2\ M_3$.

Définition 12 *La β-conversion est alors définie par :*

$$(\lambda x.M\ N) \rightarrow M[x := N] \tag{4}$$

où la notation $M[x := N]$ signifie la substitution de N à x partout où x apparait non lié.

Définition 13 *On appelle conversion-η la règle :*

$$\lambda x.(f\ x) \rightarrow f \tag{5}$$

L'expansion-η étant la règle inverse.
L'égalité λ entre termes peut être introduite, et cela par un ensemble d'axiomes :

$$\lambda x.M = \lambda y.M[y/x] \quad y \; non \; libre \; dans \; M$$

$$(\lambda x.M \; N) = M[x := N]$$

$$X = X \qquad \frac{X = Y}{Y = X} \qquad \frac{X = Y \quad Y = Z}{X = Z}$$

$$\frac{X = X'}{(Z \; X) = (Z \; X')} \qquad \frac{X = X'}{\lambda x.X = \lambda x.X'}$$

3.3 Normalisabilité

Voici quelques définitions courantes :

Définition 14 – *On appelle* redex *tout sous-terme de la forme* $(\lambda x.M \; N)$
- *un λ-terme est dit* normal *s'il ne contient aucun redex,*
- *un λ-terme est dit* normalisable *s'il peut être réduit par β-reduction, en un nombre fini de pas, à une forme normale,*
- *un calcul est dit* normalisable *si tous ses termes sont normalisables,*
- *un calcul est dit* confluent *si pour tout terme normalisable, toute réduction conduit au même résultat.*

Le théorème de Church – Rosser montre que le λ-calcul doté de la β-réduction est confluent[2]. Cependant il n'est pas normalisable, à cause de certains λ-termes qui ne le sont pas.
Exemple :
$\lambda x.(x \; x)$ est un λ-terme, tout comme $(\lambda x.(x \; x) \; \lambda x.(x \; x))$. Nous notons que :

$$(\lambda x.(x \; x) \; \lambda x.(x \; x)) \rightarrow (\lambda x.(x \; x) \; \lambda x.(x \; x))$$

et ainsi indéfiniment !
Le λ-calcul typé ne présente pas cet inconvénient.

3.4 λ-calcul typé

La réduction se termine toujours dans le λ-calcul typé où la définition des λ-termes est enrichie de la manière suivante (on admet qu'il existe une infinité dénombrable de variables dans chaque type)

Définition 15 – *toute variable de type α est un λ-terme de type α*
- *si M et N sont des λ-termes respectivement de types $\alpha \rightarrow \beta$ et α, alors $(M \; N)$ est un λ-terme de type β*
- *si M est un λ-terme de type β et x une variable de type α, alors $\lambda x.M$ est un λ-terme de type $\alpha \rightarrow \beta$*
- *il n'y a pas d'autre construction de λ-terme que celles permises par ces trois clauses.*

[2] On peut en trouver une demonstration dans [**?**].

Dans le λ-calcul typé, une relation d'égalité est introduite pour chaque type : "$=_\tau$" signifie l'égalité à l'intérieur du type τ.
Au moyen de ces définitions, nous pouvons traiter des suites d'objets comme :
$a_1, a_2, ..., a_n$
au moyen de deux règles, associées respectivement à *l'application* et à *l'abstraction*. Pour l'application :

$$\frac{a : \alpha \to \beta \qquad b : \alpha}{(a\ b) : \beta}\ App$$

et pour l'abstraction :

$$\begin{array}{c} \text{si } A_1 : a_1, ..., A_n : a_n, x : a \vdash M : b \\ \text{alors } A_1 : a_1, ..., A_n : a_n \vdash \lambda x.M : a \to b \end{array}$$

Cette règle est précisément celle que nous utilisons spontanément quand nous recherchons le type d'une fonction. Si une function f appliquée à un objet de type a donne un objet de type b, alors elle est elle-même un objet de type $a \to b$, qui est noté $\lambda x^a.f$.
Nous pouvons aussi représenter cette règle d'abstraction de la manière suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} A_1 : \alpha_1, \quad ..., \quad A_1 : \alpha_n \quad [x : a] \\ \vdots \\ M : b \end{array}}{\lambda x.M : a \to b}$$

où les crochets dénotent une *hypothèse* que la règle décharge en même temps que l'abstraction est effectuée sur le terme M.
Nous remarquons évidemment que ce sont les *mêmes* règles qui s'appliquent qu'il s'agisse des *types* ou des *formules*.

Exemple 3 *Montrons que la composée d'une fonction $a \to b$ et d'une fonction $b \to c$ est une fonction $a \to c$.*
Remarquons d'abord que :

$$\frac{\dfrac{x : a \quad f : a \to b}{(f\ x) : b} \qquad g : b \to c}{(g\ (f\ x)) : c}$$

et que donc nous avons :

$$x : a, f : a \to b, g : b \to c \vdash (g\ (f\ x)) : c$$

Ensuite, par la règle d'abstraction, nous déduisons :

$$f : a \to b, g : b \to c \vdash \lambda x.(g\ (f\ x)) : a \to c$$

Donc, non seulement, nous prouvons qu'en composant deux fonctions nous obtenons une fonction mais en plus, nous obtenons la formulation précise de cette fonction.

Dans le calcul ordinaire sur les types, la même hypothèse peut être utilisée plusieurs fois voire... jamais. Dans nos applications futures, il y aura une contrainte selon laquelle une hypothèse ne pourra être utilisée qu'une et une seule fois. Dans ce cas, le calcul sera dit *linéaire*, et nous utiliserons le symbole $\multimap$ pour dénoter la flèche.

4 Isomorphisme de Curry-Howard

4.1 Une correspondance entre types et formules

Nous venons d'observer une grande similarité entre les types et les formules dans les systèmes évoqués ci-dessus. Entre $\alpha \rightarrow \beta$ et $A \Rightarrow B$, il y a seulement une difference... de notation concernant la flèche. La règle d'application, qui permet de construire un λ-terme $(M\ N)$ à partir de λ-termes de types respectifs $\alpha \rightarrow \beta$ et α est exactement la règle d'élimination de l'implication. De la même manière, la règle d'abstraction, qui permet de construire un λ-terme $\lambda x.M$ à partir d'une variable de type α et d'un λ-terme de type β correspond exactement à la règle d'introduction de l'implication. Ce n'est pas étonnant puisque construire une fonction en tant que processus qui transforme une valeur donnée x en une image y revient à faire l'hypothèse de cette valeur, voir le résultat qu'on obtient, puis abstraire sur cet x. Une variable x est donc ici comme une hypothèse, laquelle se trouve déchargée au moment où on veut exprimer la fonction en elle-même. Nous en arrivons donc au parallèle suivant entre deux mondes (celui de la logique et celui du calcul) :

logique	**calcul**
formule	type
$[\Rightarrow\ Elim]$	application
$[\Rightarrow\ Intro]$	abstraction
hypothèse active	variable libre
hypothèse déchargée	variable liée
preuve	λ-terme

Pour illustrer la dernière ligne de cette table, considérons la preuve suivante.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad [A]^1}{A \Rightarrow B} \qquad [A]^1}{B}}{A \Rightarrow B}\ (1)$$

Dans cette preuve, associons la variable x à l' hypothèse. Supposons que f est une constante de type $A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, alors, chaque pas de la preuve se traduit en une opération du λ-calcul, ce qui permet d'étiqueter chaque formule par un λ-terme, jusqu'à ce que la conclusion $A \Rightarrow B$ soit atteinte, laquelle sera alors étiquetée par un λ-terme qui représente la preuve en entier. Nous obtenons :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{f : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad [x : A]^1}{(f\ x) : A \Rightarrow B} \qquad [x : A]^1}{((f\ x)\ x) : B}}{\lambda x.((f\ x)\ x) : A \Rightarrow B}\ (1)$$

Noter alors qu'au théorème $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, correspond un λ-terme sans constante et sans variable libre. Un tel terme est appelé un *combinateur* :

$$\lambda y.\lambda x.((y\ x)\ x)$$

Du point de vue linguistique, ce combinateur peut être appliqué à un verbe transitif, comme par exemple *raser* de manière à le transformer en un verbe réflexif (*se raser*).

4.2 Des preuves aux λ-termes

L'étiquetage par des λ-termes peut se faire évidemment sur les séquents de la Déduction Naturelle. Nous limitant à l'implication et à la conjonction, nous pouvons avoir ainsi l'étiquetage des règles suivant. Noter que, rigoureusement, les λ-termes codent les preuves et non les formules.
Axiome

$$x : (\Gamma, A \vdash A)$$

Règles d'introduction

$$\frac{u : (\Gamma \vdash A) \quad v : (\Gamma \vdash B)}{(u, v) : (\Gamma \vdash A \wedge B)} [\wedge\ I]$$

$$\frac{u : (\Gamma, x : A \vdash B)}{\lambda x.u : (\Gamma \vdash A \Rightarrow B)} [\Rightarrow\ I]$$

Règles d'élimination

$$\frac{z : (\Gamma \vdash A \wedge B)}{\pi_1(z) : (\Gamma \vdash A)} [\wedge_1\ E] \qquad \frac{z : (\Gamma \vdash A \wedge B)}{\pi_2(z) : (\Gamma \vdash B)} [\wedge_2\ E]$$

où π_1 et π_2 correspondent aux *projections*.

$$\frac{u : (\Gamma \vdash A \Rightarrow B) \quad v : (\Gamma \vdash A)}{(u\ v) : (\Gamma \vdash B)} [\Rightarrow\ E]$$

où "(,)" correspond au *couplage*, mais $(f\ x)$ représente l'application de f à x.
Il est cependant d'usage en général de mettre les étiquettes actives (celles qui sont utilisées au pas courant) sur les termes actifs dans l'application des règles, d'où :
Axiome

$$\Gamma, x : A \vdash x : A$$

Règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash (u, v) : A \wedge B} [\wedge\ I]$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x.u : A \Rightarrow B} [\Rightarrow\ I]$$

Règles d'élimination

$$\frac{\Gamma \vdash z : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_1(z) : A} [\wedge_1\ E] \qquad \frac{\Gamma \vdash z : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_2(z) : B} [\wedge_2\ E]$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash (u\ v) : B} [\Rightarrow\ E]$$

Concernant le **calcul des séquents intuitionnistes** (limité encore à l'implication et à la conjonction) il donnera lieu aux règles suivantes.
Règles structurelles :

$$\frac{\Gamma \vdash \gamma : B}{\Gamma, x : A \vdash \gamma : B} A \qquad \frac{\Gamma, x : A, x : A \vdash \gamma : B}{\Gamma, x : A \vdash \gamma : B} C \qquad \frac{\Gamma, x : A, y : B, \Gamma' \vdash \gamma : B}{\Gamma, y : B, x : A, \Gamma' \vdash \gamma : B} P$$

Axiome

$$x : A \vdash x : A$$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : A \quad \Gamma, x : A \vdash \gamma : C}{\Gamma \vdash [\tau/x]\gamma : C} [cut]$$

Règles logiques :
Implication

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma, (z\, u) : B \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \Rightarrow B \vdash \gamma : C} [\Rightarrow L] \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x.u : A \Rightarrow B} [\Rightarrow R]$$

Conjonction

$$\frac{\Gamma, \pi_1(z) : A \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \wedge B \vdash \gamma : C} [\wedge_1 L] \qquad \frac{\Gamma, \pi_2(z) : B \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \wedge B \vdash \gamma : C} [\wedge_2 L]$$

(Variante :

$$\frac{\Gamma, \pi_1(z) : A, \pi_2(z) : B \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \wedge B \vdash \gamma : C} [\wedge L])$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash (u, v) : A \wedge B} [\wedge R]$$

NB : il serait également possible d'écrire les règles gauche de la manière suivante, c'est-à-dire en mettant en évidence les substitutions : imaginons que, dans la preuve, nous partions des axiomes pour aller vers la conclusion, les hypothèses dans les prémisses sont alors étiquetées par des variables et le passage à la conclusion se traduit par une opération de substitution de termes à ces variables.
Implication

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma, x : B \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \Rightarrow B \vdash [(z\, u)/x]\gamma : C} [\Rightarrow L]$$

Conjonction

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \wedge B \vdash [\pi_1(z)/x]\gamma : C} [\wedge_1 L] \qquad \frac{\Gamma, x : B \vdash \gamma : C}{\Gamma, z : A \wedge B \vdash [\pi_2(z)/x]\gamma : C} [\wedge_2 L]$$

Exemple 4 *A titre d'exemple, reprenons la preuve associée au combinateur* $\lambda y \lambda x.((y\ x)\ x)$ *mais dans le cadre du calcul des séquents.*

Commençons par faire la preuve du séquent.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \Rightarrow B, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A \vdash B}C}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

Notons au passage l'utilisation de la règle de contraction (C). Etiquetons ensuite les formules actives des séquents successifs apparaissant dans cette preuve. Nous pouvons partir du bas et procéder ensuite à des substitutions. Par exemple, première étape :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \Rightarrow B, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A \vdash B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \tau : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\tau : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

Les formules du côté gauche des séquents, considérées comme des *hypothèses* sont étiquetées par des variables alors que la formule du côté droit est étiquetée par un terme qu'il reste à déterminer complètement (on sait seulement à l'étape actuelle qu'il s'agit d'un terme $\lambda y.\tau$).
Deuxième étape :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \Rightarrow B, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A \vdash \mu : B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \lambda x.\mu : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\lambda x.\mu : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

τ est identifié lui-même comme un terme de la forme $\lambda x.\mu$.
Troisième étape :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \Rightarrow B, A \vdash B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A, x : A \vdash \mu : B}[\Rightarrow\ G]}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A \vdash \mu : B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \lambda x.\mu : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\lambda x.\mu : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

La règle de contraction reduplique l'hypothèse de type A avec *la même* étiquette.

Quatrième étape :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A \qquad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{(y\ x) : A \Rightarrow B, x : A \vdash \mu : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A, x : A \vdash \mu : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A \vdash \mu : B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \lambda x.\mu : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\lambda x.\mu : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

Cinquième étape :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A \qquad \dfrac{x : A \vdash x : A \quad ((y\ x)\ x) : B \vdash \mu : B}{(y\ x) : A \Rightarrow B, x : A \vdash \mu : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A, x : A \vdash \mu : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A \vdash \mu : B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \lambda x.\mu : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\lambda x.\mu : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

A cause de l'axiome d'identité, μ est identifié à $((y\ x)\ x)$. D'où l'état final de la preuve, avec le λ-terme qui lui est associé.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A \qquad \dfrac{x : A \vdash x : A \quad ((y\ x)\ x) : B \vdash ((y\ x)\ x) : B}{(y\ x) : A \Rightarrow B, x : A \vdash ((y\ x)\ x) : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A, x : A \vdash ((y\ x)\ x) : B}[\Rightarrow\ G]}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B), x : A \vdash ((y\ x)\ x) : B}C}{y : A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \lambda x.((y\ x)\ x) : A \Rightarrow B}[\Rightarrow\ D]}{\vdash \lambda y.\lambda x.((y\ x)\ x) : (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}[\Rightarrow\ D]$$

On peut remarquer ici que l'étiquetage précis des hypothèses par des variables permet de rendre compte de la différence entre deux cas d'utilisation de deux occurrences d'une hypothèse représentée par la même formule : le cas où il s'agit de la même hypothèse qui est utilisée deux fois avant d'être déchargée (les deux occurrences ont la même étiquette) et le cas où il s'agit bien deux fois de la même formule, mais avec deux étiquetages différents, ce qui correspond à deux hypothèses utilisés chacune à son tour et déchargées également chacune à son tour, ce qu'on aurait par exemple dans la preuve du séquent

$$\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$$

dont on montrera (exercice) qu'il est associé au λ-terme :

$$\lambda x.\lambda z.\lambda y.((y\ x)\ z)$$

La preuve du séquent est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \Rightarrow B, A \vdash B}}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A, A \vdash B}}{A \Rightarrow (A \Rightarrow B), A \vdash A \Rightarrow B}}{\dfrac{A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B)}{\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B))}}$$

Il est clair que la règle de contraction n'est jamais utilisée et que les deux hypothèses A qui figurent à un certain moment de la preuve sont *indépendantes* l'une de l'autre, et donc représentées par des variables différentes x et z