Cours de sémantique compositionnelle

Cours de Licence de Sciences du Langage, L3, A. Lecomte, 2010-2011

1 Langages prédicatifs

(rappels du cours de logique de L2)

1.1 Symboles

- constantes individuelles (**a, b, c, ...**) et variables individuelles : $x, y, z, ...$
- constantes de prédicat, chacune avec une arité (nombre entier ≥ 0), ex :

$$\alpha^1, \beta^2, ..., \phi^n, ...$$

- constantes logiques qui se répartissent en deux catégories :
  - les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - les quantificateurs : $\forall, \exists$
- symboles de ponctuation : (,) et éventuellement d'autres formes de parenthèses

1.2 Règles de formation

- On appellera *termes* les symboles de constante et de variable individuelles,
- si $t_1, ..., t_n$ sont des termes et si ϕ est un symbole de prédicat d'arité n, alors $\phi(t_1, ..., t_n)$ est une *formule atomique*,
- si A et B sont des formules, alors $(A \vee B), (A \wedge B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ sont des formules,
- si A est une formule, $(\neg A)$ est une formule,
- si ξ est une variable individuelle et si A est une formule, alors $(\forall \xi)A$ et $(\exists \xi)A$ sont des formules.

1.3 Interprétation d'un langage prédicatif

1.3.1 Univers, fonction d'interprétation, structure

Définition 1 *Etant donné un langage prédicatif L, on appellera* cadre d'interprétation pour *L, la donnée de :*
- *un ensemble non vide U (appelé domaine ou univers d'interprétation)*
- *une fonction I (appelée fonction d'interprétation)*

La fonction I a comme domaine de définition l'ensemble des constantes, individuelles et prédicatives, du langage. La règle est qu'elle associe à toute constante individuelle un élément de U, à tout prédicat unaire une partie de U, à tout prédicat binaire une partie de U^2, et généralement à tout prédicat n-aire une partie de U^n.

EXEMPLE 1 – *var. individuelles :* x, y, z,

– *const. individuelles :* **p, j, m**

– *prédicats :* $c_{/2}, e_{/2}, f_{/1}$

On a :

$I(f)$ est une partie de U

$I(e)$ et $I(c)$ sont des parties de $U \times U$ (donc des relations binaires sur U).

$I(\mathbf{j}), I(\mathbf{p})$ et $I(\mathbf{m})$ sont des éléments de U.

EXEMPLE 2 $U = \{$PAUL, JULES, MARIE, LUCIE, ROBERT$\}$

$I(\boldsymbol{p}) =$ PAUL,
$I(\boldsymbol{j}) =$ JULES,
$I(\boldsymbol{m}) =$ MARIE,
$I(f) = \{$MARIE, LUCIE$\}$
$I(e) = \{$(ROBERT, MARIE), (ROBERT, LUCIE), (ROBERT, JULES)$\}$
$I(c) =\{$(PAUL, MARIE), (JULES, MARIE), (JULES, LUCIE)$\}$

1.3.2 Valeurs de variables individuelles

La fonction d'interprétation I ne s'occupe que des constantes. Les variables individuelles, sont susceptibles, elles, de prendre des « valeurs ». Les valeurs qu'on peut donner à une variable sont tous les éléments de l'univers U. Par exemple, si x est une variable dans notre langage, x peut prendre pour valeurs possibles PAUL, MARIE, LUCIE, ROBERT, JULES. S'il y a dans le langage plusieurs variables, comme ici : x, y et z, on attribuera simultanément des valeurs a, b, c à ces variables, où a, b, c peuvent être (indépendamment) PAUL, MARIE, LUCIE, ROBERT, JULES. Quand une telle affectation de valeurs est réalisée, on dit qu'on a défini une *assignation de valeurs aux variables*. On notera $< x := a, y := b, z := c >$ le fait de donner à x, y et z simultanément les valeurs a, b, c. Une assignation sera notée comme une fonction, de l'ensemble des variables, dans U. Par exemple, l'assignation $< x := a, y := b, z := c >$ sera considérée comme la fonction qui à x associe a, à y associe b et à z associe c.

1.3.3 Variantes

Définition 2 *Soit g une fonction d'assignation à des variables $x, y, z, \ldots$. Soit ξ l'une de ces variables. On appelle ξ-variante de g toute assignation g' identique à g sauf éventuellement en ce qui concerne la variable ξ.*

Par exemple, si $g =< x := a, y := b, z := c >$, une y-variante de g est $< x := a, y := a, z := c >$.

1.3.4 Evaluation des formules relativement à une interprétation et une assignation g

Désormais, une formule s'évalue (à "VRAI" ou à "FAUX") relativement à une interprétation $M =< U, I >$ et à une assignation de valeurs aux variables qui y figurent. Les règles d'évaluation sont des règles récursives. Nous noterons $[A]]^{U,I,g}$ le résultat de l'évaluation de la formule A par rapport à l'univers U, à la fonction d'interprétation I et à l'assignation g.
On pose comme définition :

1. pour les termes :
   – si ξ est une variable et si dans g, il y a l'affectation $< \xi := a >$, alors $[[\xi]]^{U,I,g} = a$ (ou, dit autrement, $[[\xi]]^{U,I,g} = g(\xi)$)
   – si κ est une constante et si $I(\kappa) = k$, alors $[[\kappa]]^{U,I,g} = k$, (ou, dit autrement, $[[\kappa]]^{U,I,g} = I(\kappa)$)
2. pour les formules :
   – les formules atomiques :
   Si ϕ est un prédicat n-aire et si $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors $[[\phi(t_1, ..., t_n)]]^{U,I,g} = 1$ si et seulement si $([[t_1]]^{U,I,g}, ..., [[t_n]]^{U,I,g}) \in [[\phi]]^{U,I,g}$
   – les formules générales :
   Si A et B sont des formules alors :
   – $[[A \wedge B]]^{U,I,g} = 1$ si et seulement si $[[A]]^{U,I,g} = [[B]]^{U,I,g} = 1$
   – $[[A \vee B]]^{U,I,g} = 0$ si et seulement si $[[A]]^{U,I,g} = [[B]]^{U,I,g} = 0$
   – $[[\neg A]]^{U,I,g} = 1$ si et seulement si $[[A]]^{U,I,g} = 0$
   – $[[A \Rightarrow B]]^{U,I,g} = 0$ si et seulement si $[[A]]^{U,I,g} = 1$ et $[[B]]^{U,I,g} = 0$
   – $[[(\forall\xi)A]]^{U,I,g} = 1$ si et seulement si toute ξ-variante g' de g est telle que $[[A]]^{U,I,g'} = 1$
   – $[[(\exists\xi)A]]^{U,I,g} = 1$ si et seulement s'il existe une ξ-variante g' de g telle que : $[[A]]^{U,I,g'} = 1$.

EXEMPLE 3 *Exemple : soit à évaluer les formules suivantes par rapport au cadre d'interprétation de l'exemple 2 et à une assignation g :*

1. $f(j)$
2. $f(x)$
3. $(\exists x)f(x)$
4. $(\exists z)(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$

Cas de (1) : $[[f(j)]]^{U,I,g} = 1$ *ssi* $I(j) \in I(f)$*, or* $I(j)$ = JULES *et* $I(f) = \{$MARIE, LUCIE$\}$ *, et manifestement,* JULES$\notin\{$MARIE, LUCIE$\}$*, donc* $[[f(j)]]^{U,I,g} = 0$*. On remarque que g n'intervient pas, puisqu'il n'y a pas de variable dans l'expression. On écrit aussi (où* $M =< U, I >$*) :*

$M \not\models f(j)$

Cas de (2) : ici l'assignation est nécessaire. Soit g l'assignation $< x :=$JULES, $y :=$MARIE, $z :=$LUCIE$>$. $g(x) =$JULES*, et là encore,* JULES$\notin\{$MARIE, LUCIE$\}$*,donc :*

$M, g \not\models f(x)$

Cas de (3) : $[[(\exists x)f(x)]]^{M,g} = 1$ *ssi il existe une* x*-variante* g' *de* g *telle que* $[[f(x)]]^{M,g'} = 1$*. Il* *suffit de changer la valeur affectée à x dans g et de remplacer g par l'assignation* $< x :=$MARIE, $y :=$MARIE, $z :=$LUCIE$>$. *En ce cas, on a* $g(x) =$MARIE, *et* MARIE$\in\{$MARIE, LUCIE$\}$,*donc :*

$M, g' \models f(x)$ *et donc*

$M, g \models (\exists x)f(x)$

mais comme le raisonnement aurait été le même quelle que soit l'assignation g de départ (puisqu'il n'ya pas d'autre variable dans la formule), on voit que cette évaluation est indépendante de g et qu'on peut écrire :

$M \models (\exists x)f(x)$

Cas de (4) : la formule est vraie par rapport à M et à g si on peut trouver une z-variante g_z de g (autrement dit une valeur pour z) telle que :

– $(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$ *soit vraie par rapport à cette z-variante de g*

mais pour que cela soit, il faut que toutes les x-variantes $g_{z,x}$ de g_z soient telles que

– $(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$ *soit vraie par rapport à elles*

et pour que cela soit, il faut que toutes les y-variantes $g_{z,x,y}$ de toutes les $g_{z,x}$ soient telles que

– $((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$ *soit vraie par rapport à elles*

Ces deux dernières conditions peuvent se résumer en une seule : que toutes les $\{x, y\}$-variantes de g_z soient telles que $((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$ soit vraie par rapport à elles.

Il faudrait donc essayer toutes les valeurs de z.

– $z =$ PAUL *: il est facile de trouver une $\{x, y\}$-variante de g_z rendant la formule fausse : il suffit de prendre l'assignation* $< x :=$JULES, $y :=$LUCIE, $z :=$PAUL$>$ *car pour cette assignation,* $[[c(x, y)]] = 1$ *et* $[[f(y)]] = 1$ *donc* $[[c(xy) \wedge f(y)]] = 1$, *alors que* $[[e(z, x)]] = 0$, *donc* $[[(c(xy) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x)]] = 0$

– *... etc.*

On trouve que pour chaque valeur de z, il y a toujours au moins une valeur du couple (x, y) qui rend fausse la formule $(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$, donc on peut dire que :

$M, g \not\models (\exists z)(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$

et comme là encore, le raisonnement aurait été le même quelle que soit l'assignation de départ g, on peut écrire :

$M \not\models (\exists z)(\forall x)(\forall y)((c(x, y) \wedge f(y)) \Rightarrow e(z, x))$

Dans l'exemple précédent, on peut évidemment noter que si on interprète le prédicat f par *journaliste*, c par *a écrit à* et e par *être l'employeur de*. La formule du cas (4) pourrait traduire une phrase comme :

il y a quelqu'un qui est l'employeur de chaque personne qui a écrit à une journaliste

Or, on voit en effet tout de suite que dans le cadre d'interprétation proposé, il n'existe pas de tel individu, car il serait l'employeur à la fois de Jules et de Paul, or ceux-ci n'ont pas d'employeur commun, d'ailleurs Paul est sans emploi.

On aura noté au passage que dans tous les cas considérés la procédure d'évaluation se termine. Cela tient évidemment à ce que, à chaque pas dans l'évaluation, on est ramené à l'évaluation d'un cas plus simple (c'est-à-dire contenant un symbole logique en moins). Et cela tient dans notre exemple aussi au fait que nous avons un univers fini, ce qui permet de passer en revue tous les cas possibles lorsque les formules sont quantifiées. Cela ne sera plus le cas si l'univers est infini (cas où par exemple, l'univers esr l'ensemble des nombres entiers). En effet, on gardera bien toujours la première caractéristique (formule à évaluer plus simple à chaque pas) mais l'infinitude de l'univers fera que nous ne pourrons pas toujours terminer l'évaluation d'une formule avec quantificateur. De fait, il a été démontré (Church, 1936, Turing, 1936) que la logique des prédicats du premier ordre, contrairement à la logique propositionnelle, est indécidable. Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider en un nombre fini de pas qu'une formule donnée quelconque est vraie ou fausse. Cela n'empêche pas qu'elle soit complète (Gödel, 1930). C'est-à-dire qu'il existe un système formel permettant de démontrer toutes les formules qui sont vraies (et seulement elles). On pourrait penser qu'il suffit alors de prendre ce système pour résoudre la question de la décidabilité, mais c'est lui-même un système indécidable. Autrement dit, confronté à une formule quelconque, il ne sera pas capable en général de dire au bout d'un temps fini si c'est un théorème ou non.

1.3.5 Notion de modèle, cohérence et déduction

Définition 3 *Etant donné un ensemble Φ de formules closes d'un langage prédicatif donné, on appelle modèle de Φ toute interprétation $< U, I >$ par rapport à laquelle toutes les formules de Φ sont vraies.*
Un ensemble Φ de formules closes d'un langage prédicatif est dit cohérent *ou compatible s'il en existe un modèle. Il est dit* incohérent *dans le cas contraire.*

Remarque 1 *On appelle souvent* théorie *un ensemble de formules de closes Φ d'un langage prédicatif L. On dit alors qu'une théorie est cohérente si et seulement si elle admet un modèle.*

On voit que l'on peut désormais généraliser les notions introduites à propos de la logique propositionnelle (cohérence, incohérence, déductibilité).

Définition 4 *Etant données des formules closes $A_1, ..., A_n$ et B d'un langage prédicatif, on dira que B se déduit (sémantiquement) de $A_1, ..., A_n$ et on écrira :*

$$\{A_1, ..., A_n\} \models B$$

si et seulement si tout modèle de $\{A_1, ..., A_n\}$ est aussi un modèle de B.

Définition 5 *Une formule close A d'un langage prédicatif L sera dite* universellement valide *(cf tautologie en logique propositionnelle) si et seulement si elle est vraie dans toute cadre d'interprétation pour L. On écrit dans ce cas : $\models A$.*

On démontre maintenant de façon analogue à ce qu'on a vu en logique propositionnelle :

Proposition 1 $A \models B$ *si et seulement si :* $\models (A \Rightarrow B)$

Définition 6 *Deux formules closes A et B d'un langage prédicatif L sont dites* universellement équivalentes *si et seulement si :* $\models (A \Leftrightarrow B)$.
Deux théories T et S sont dites équivalentes *si et seulement si elles admettent les mêmes modèles.*

Ajoutons quelques notations dont nous aurons besoin : nous écrirons : $\mathcal{M} \models A$, pour : A est vraie dans la cadre d'interprétation pour L $\mathcal{M}$, quelle que soit l'assignation considérée. Cela est équivalent à : la clôture universelle de A est vraie dans $\mathcal{M}$, où clôture universelle d'une formule signifie : formule obtenue en ajoutant devant elle des quantificateurs universels portant sur toutes les variables qui sont libres dans A.