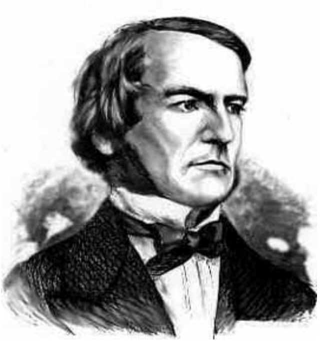
Logique

Cours de Licence de Sciences du Langage (L2)
Alain Lecomte – Professeur, Université Paris 8

1 – Opérations booléennes

1.1 Classes et symboles



- En 1854, George Boole publie « The Laws of Thought »
- Il s'agit d'appliquer les méthodes de l'algèbre aux « lois de la pensée »
- x, y, z … ne désignent plus des quantités, comme en algèbre usuelle, mais des *notions*, ou mieux : des *classes*.
- Représentons la classe des individus, auxquels est applicable un nom ou une description particulière, par une seule lettre, telle que *x*. Si le nom est «mouton» par exemple, représentons par *x* « tous les moutons », ou la classe des « moutons ». (Boole, 1854)
- D'autre part, si un adjectif, comme « bon», est employé comme terme de description, représentons par une lettre, telle que *y*, tous les êtres auxquels on peut appliquer cet adjectif.
- Supposons maintenant que la combinaison *xy* représente la classe des choses auxquelles s'appliquent simultanément les noms et descriptions représentées par *x* et par *y*.
- Ainsi, si *x* représente « tout ce qui est blanc » et *y* « tous les moutons », *xy* représentera « tous les moutons blancs », et de même, si *z* représente tout ce qui possède des cornes, et que *x* et *y* conservent leurs mêmes significations, *xyz* représentera « tous les moutons blancs possédant des cornes ».
- Considérons maintenant les lois auxquelles les symboles x, y, z, etc., pris dans le sens ci-dessus, sont soumis.

1.2 Lois « de la pensée » : opérations sur les classes

1.2.1 blanc bonnet et bonnet blanc

- Tout d'abord, il est évident que, d'après les combinaisons ci-dessus, l'ordre dans lequel les symboles sont écrits n'a aucune importance. Les expressions *xy* et *yx* représentent également la classe des choses auxquelles le nom *x* et la description *y* sont applicables.

$$\boxed{xy = yx}$$

- On appelle *commutativité* cette propriété.

1.2.2 les costauds costauds sont les costauds

- Puisque la combinaison de deux symboles sous la forme *xy* exprime la totalité de la classe des objets auxquels les noms et qualités représentés par *x* et par *y* sont applicables simultanément, il s'ensuit que si les deux symboles ont exactement la même signification, leur combinaison n'exprime rien d'autre que ce qu'exprime chacun des symboles pris séparément.
- Nous avons alors:

$$\boxed{xx = x}$$

- On appelle *idempotence* cette propriété.

1.2.3 $x^2 = x$

- Or, en algèbre, l'expression *xx* est représentée plus brièvement par x^2. Nous pouvons adopter le même principe de notation ici, puisque la façon d'exprimer une succession particulière d'opérations mentales est une chose en elle-même aussi arbitraire que la façon d'exprimer une idée ou une pensée unique.

$$\boxed{x^2 = x}$$

1.2.4 les torchons et les serviettes

- Nous allons passer maintenant à une autre classe de signes du langage et aux lois qui leur sont attachées.
- *La classe 2. C'est celle des signes des opérations mentales par lesquelles nous rassemblons les parties en un tout, ou séparons les parties d'un tout.*
- Nous sommes capables, non seulement de former les conceptions des objets caractérisés par leurs noms, leurs qualités ou les circonstances applicables à chaque individu du groupe considéré, mais aussi de former la conception collective d'un groupe d'objets formé lui-même de groupes partiels, chacun d'eux ayant un nom ou une description.
- Dans ce but, nous utilisons les conjonctions « et », « ou », etc.
- « les arbres et les animaux »
- « les montagnes arides ou les vallées fertiles »
- *les mots « et », « ou » sont analogues au signe + de l'algèbre et les lois qui les régissent sont identiques*.

1.2.5 Les torchons et les serviettes de lin blanc

- Ainsi l'expression « hommes et femmes » est équivalente à l'expression « femmes et hommes».

$$\boxed{x + y = y + x \quad \text{(commutativité)}}$$

- Soit z représentant l'adjectif « européen ».
- Puisque le sens est le même qu'on dise:

« hommes et femmes européens » ou « les hommes européens et les femmes européennes», nous pouvons écrire:

$$\boxed{z(x+y) = zx + zy}$$

On appelle *distributivité* cette propriété.

Remarque 1 : un «et»-et ou un «et»-ou?

Boole peut ici nous entraîner dans une certaine confusion puisqu'il identifie « et » et « ou ». Il y a effectivement confusion possible dans la mesure où le « et » sert aussi bien à désigner la première opération « mentale » (cf. quelque chose qui est un mouton (x) **et** qui est blanc (y), rendu par: xy) que la seconde (cf. les moutons (x) **et** les brebis (z): x+z).

Notre usage actuel est de **nettement distinguer « et » et « ou ».** « et » sera réservé à la première opération, « ou » à la seconde.

Noter que « les hommes **et** les femmes » désigne la classe des êtres qui sont «homme **ou** femme ».

Remarque 2

La première opération n'était pas notée explicitement (on la représentait par une simple *juxtaposition*), mais on pourrait la noter, par exemple par un point (.) ou par le symbole multiplicatif ×. La distributivité devient:

$$\boxed{x\times(y+z) = x\times y + x\times z}$$

1.2.6 excepté les célibataires de moins de six ans

- Mais la seule idée d'une opération effectuant quelque changement positif nous suggère l'idée d'une opération négative qui lui soit opposée et ayant donc l'effet de défaire ce que la première opération a fait.
- Nous exprimons cette opération dans le langage courant par le mot *excepté*.
- Si x représente « les hommes » et y « les européens », l'expression « tous les hommes, excepté les européens » sera symbolisé par $x - y$.

1.2.7 en général $(x+y) - y \neq x$

- Le signe « - » dénote-t-il vraiment « l'opposée de +» comme dans le cas des nombres?

cf: $(8 + 3) - 3 = 8$

mais:

- « les hommes et les européens » - « les européens » ≠ « les hommes »
- « les hommes et les européens » - « les européens » = « les hommes **non européens**»

1.3 L'égalité et les axiomes généraux de l'algèbre

1.3.1 Les signes par lequels on exprime une relation

- <u>La classe 3</u>*: c'est celle des signes par lesquels on exprime une relation et l'on forme des propositions.*
- Il est suffisant pour les besoins de la logique de considérer qu'elle ne comprend que le verbe *être*, exactement « est » ou « sont » car tous les autres verbes peuvent être décomposés en cet élément et l'un des signes de la classe 1.
- Les signes « est » ou « sont » peuvent être exprimés par le symbole =.
- « les étoiles sont les soleils et les planètes » donne si x: les étoiles, y: les soleils et z: les planètes:

$$x = y + z$$

1.3.2 Axiomes généraux de l'algèbre

- Si l'on ajoute des choses égales à des choses égales, les ensembles résultant sont égaux.

- Si l’on retire des choses égales de choses égales, les restes sont égaux.
- etc. peut-on formuler d’autres lois similaires?
- cf: si x = y, alors zx = zy …
- Mais… la réciproque est-elle vraie?
- C’est-à-dire: de zx = zy, peut-on toujours déduire x = y ? (et en algèbre ordinaire, est-ce toujours le cas?)

1.3.3 0 et 1

- Nous avons vu que les symboles de la logique suivent la loi spéciale: $x^2 = x$.
- Or, parmi les symboles numériques, il n’en est que deux qui suivent cette loi: 0 et 1.
- L’équation algébrique $x^2 = x$ n’a donc que deux racines et pas d’autres.
- Par conséquent, on est amené à comparer les symboles de la logique aux symboles de la quantité qui n’admet que deux valeurs seulement : **0** et **1**.
- On peut alors concevoir une algèbre dans laquelle les symboles x, y, z, etc. peuvent avoir indifféremment les valeurs 0 et 1 **et ces seules valeurs**.

1.3.4 Mais quelle est la signification de 0 et de 1 ?

- Le symbole 0, dans son utilisation en algèbre, satisfait à la loi formelle suivante:

$$\boxed{0\times y = 0 \text{ (ou } 0y = 0)}$$

- Un tel élément est appelé *élément absorbant* pour l’opération ×.
- Il faut donc assigner au symbole 0 une interprétation telle que la classe représentée par 0y soit identique à celle représentée par 0, **quelle que soit la classe y**.

1.3.5 quand les poules auront des dents…

- 0 = classe des choses inexistantes
- Ex: *les cercles carrés, les européens non européens, les lacs en pente…*
- Ou: classe **vide**.
- Noter qu’on a :

$$\boxed{x + 0 = 0 + x = x}$$

- 0 est *élément neutre* de +.

1.3.6 1

- Que pensez-vous de 1?
- Élément aborbant de … ?
- Élément neutre de … ?
- Interprétation intuitive?
- Interprétation de 1 – x ?

1.3.7 Principe de non-contradiction

- Boole énonce la proposition suivante:

« l’axiome des métaphysiciens dénommé « principe de non contradiction », qui affirme qu’il est impossible pour un être de posséder une certaine qualité et, en même temps, de ne pas la posséder, est une conséquence de la loi fondamentale de la pensée exprimée par l’équation x2 = x »

- **Démontrez-le !**

1.3.8 Autres conséquences…

- Il y a une deuxième forme de distributivité: $x+yz = (x+y)(x+z)$
- Pouvez-vous **la démontrer**?

Les lois d'absorption:

- Démontrer que $x + xy = x$
- Et que $x(x+y) = x$

1.3.9 Les européens du sud sont des européens!

- On peut introduire d'autres signes, notamment pour exprimer des relations entre concepts (ou classes, ou notions).
- Par exemple, « les Européens du Sud » sont « des Européens ».
- Soit $\leq$ le signe indiquant cette relation, si e: « européens » et s: « du sud », on aura:

$$es \leq e$$

Remarque :

Boole a outrageusement simplifié les choses en considérant que le verbe «être» (« est » et « sont ») serait représenté par le signe =. Il n'envisageait pas à ce moment-là l'utilisation de « être » dans un sens **inclusif** et non égalitaire.

1.3.10 que les poissons soient des animaux aquatiques = il n'est de poisson que de poisson aquatique

- Si $x \leq y$, les choses qui sont xy sont exactement celles qui sont x, et réciproquement …
- On peut donc ***définir*** la relation $\leq$ par cette propriété, autrement dit:

$$\boxed{x \leq y =_{def} xy = x}$$

Remarque

Le symbole que nous venons d'introduire: $=_{def}$ est un **méta-symbole** : il n'est identique à aucun des symboles que nous avons introduits jusqu'à présent et il nous sert à émettre des jugements sur des propositions exprimées en termes des symboles déjà introduits (ici, le jugement « est défini au moyen de »)

1.4 Exercices et conséquences

- Démontrer que la relation d'inclusion $\leq$ est bien une **relation d'ordre**, autrement dit qu'elle est:
    - Réflexive
    - Antisymétrique au sens large
    - Transitive
- Vérifier qu'on a bien $xy \leq x$ (et évidemment $xy \leq y$) ainsi que $x \leq x+y$ et $y \leq x+y$
- que, quelque soit x : $0 \leq x$ et $x \leq 1$
- démontrer que si $x \leq y$, alors $x+y = y$
- et que, réciproquement, si $x+y = y$, alors $x \leq y$

1.5 Résumé

Nous sommes partis du travail original de Boole, avons introduit trois types de signes (pour désigner les classes, pour désigner les opérations, pour désigner les relations) ainsi que certains « principes » ou axiomes sur la base de certaines idées intuitives qui nous ont paru évidentes,

Puis nous avons vu que certaines propriétés pouvaient se déduire de ces axiomes….
Désormais nous appellerons ***variables*** *les lettres utilisées pour désigner des classes quelconques (x, y, z…) et* ***constantes*** *les signes particuliers, comme 0 ou 1, qui ne changent jamais de valeur. Le cas où les variables ne peuvent prendre pour valeurs que 0 et 1 donne une interprétation possible de ces opérations.*