Cours de logique – 4

Calcul propositionnel

La syllogistique d'Aristote mettait en avant les classes ou termes (exprimés par des syntagmes nominaux). Chrysippe et les mégariques (nom donné à une école de logiciens résidant à Mégare) mettront en avant les propositions (exprimées par des phrases). C'est aussi à l'époque récente, la voie suivie par les logiciens de la fin du XIXème siècle et du début du XXème siècle (Frege, Russell etc.). Une **proposition** est *une expression susceptible d'être soit vraie soit fausse*. Par exemple :

La Seine coule à Limoges

La Seine coule à Paris

Aujourd'hui, 5 mars 2013, il fait beau sur Paris

Rebecca est l'amie de Sandra

Etc.

Deux propositions peuvent toujours se combiner pour en former d'autres, qu'on dira *complexes* ou *composées*. Par exemple :

*La Seine coule à Limoges **et** la Vienne est son affluent*

*La Seine coule à Limoges **ou** la Seine coule à Paris*

*La Seine **ne** coule **pas** à Limoges*

***Soit** la Seine coule à Paris **soit** la Seine coule à Limoges (mais pas les deux)*

*La Seine ne coule **ni** à Paris **ni** à Limoges*

***Si** la Seine coule à Limoges **alors** le boulanger du coin va être nommé pape*

***Si** la Seine coule à Paris, elle ne coule pas à Limoges*

*Il fait beau à Paris **seulement si** c'est les vacances*

***S'**il fait beau sur Paris **alors** les oiseaux chantent (dans Paris) et les oiseaux **ne** chantent **que** dans ce cas*

(autrement dit : les oiseaux chantent dans Paris **si et seulement s'il** fait beau sur Paris)

Il n'y a pas de limite à la composition des propositions entre elles, par exemple :

Si la Seine coule à Limoges ou à Paris et que la Vienne est un affluent de la Seine alors soit les oiseaux chantent dans Paris soit il y pleut.

Ces nouvelles propositions sont obtenues au moyen des mots ou groupes de mots :

- et

- ou
- si… alors
- seulement si
- si et seulement si
- ne … pas

que nous appellerons des **connecteurs**. On notera que les compositions sont « libres », au sens où on n'impose *aucun lien de contenu évident entre les propositions qui sont composées*. Avec deux propositions quelconques A et B, comme « il fait beau le 5 mars 2013 sur Paris » et « la Vienne coule à Limoges », on peut obtenir toutes les compositions possibles : A et B, A ou B, si A alors B, A si et seulement si B, non A, ni A ni B etc. Même la phrase « S'il fait beau le 5 mars 2013 sur Paris alors la Vienne coule à Limoges » possède un sens, alors qu'il n'y a aucun lien évident entre le temps qu'il fait à Paris et le fait que la ville de Limoges soit traversée par telle ou telle rivière. Cette phrase n'est qu'une connexion entre deux phrases arbitrairement choisies. Reste évidemment à lui donner une signification précise. Le problème de la signification des phrases de ce genre a d'ailleurs beaucoup occupé les logiciens antiques, comme Chrysippe, qui cherchaient à définir ce que l'on entend par « implication ». Une des meilleures solutions trouvées est que l'on dit que « si A alors B » (ou « A implique B ») lorsqu'on veut dire qu'il n'est jamais le cas que l'on ait A sans avoir B. Ainsi l'adage « il n'y a pas de fumée sans feu » se traduit-il par une implication : « si fumée, alors feu ». « Si alors B » ne serait alors qu'une abréviation d'une expression qui dit que « A et non-B » est faux, autrement dit : non-(A et non-B).

Formalisation

1) Syntaxe

Il est temps maintenant de formaliser cela au moyen de symboles, de façon à faire ressortir que, dans le cas des propositions, comme dans celui des classes, on a bien **un calcul**. Introduisons donc les symboles suivants :

$\vee$ pour « ou » (inclusif), $\wedge$ pour « et », $\neg$ pour « non », $\Rightarrow$ pour « si … alors », $\Leftrightarrow$ pour « si et seulement si »

+ des lettres : p, q, r, … pour représenter des propositions élémentaires (dites aussi atomiques)

+ les parenthèses : (et)

Alors on peut écrire les règles d'un langage qui contient toutes les expressions correspondant à des propositions :

- p, q, r, … sont des propositions
- si A et B sont des propositions, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(\neg A)$ sont des propositions
- rien n'est une proposition hormis par ces deux règles.

Ces règles nous permettent de tester si une expression quelconque formée à partir de ces symboles correspond bien ou non à une proposition, c'est-à-dire à une expression ayant un sens du point de vue du calcul propositionnel.

Par exemple : $(p \wedge \vee (q \Rightarrow r\ p))$ n'est évidemment pas une expression ayant un sens ! en revanche, $((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg (p \vee r)))$ correspond bien à ces règles. On peut, pour s'en convaincre, faire un arbre (arbre des sous-formules), lequel exprime parfaitement bien quelle est la **structure** de cette proposition.

Remarque : dans la pratique, on n'écrira pas toutes les parenthèses quand il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, par exemple, les parenthèses les plus extérieures peuvent en général être omises.

2) Sémantique

Une fois que nous connaissons les formes qui ont un sens, il reste à leur donner explicitement ce sens. Pour cela, nous remarquerons que, étant données deux propositions A et B,

- $A \wedge B$ est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie

C'est donc la définition du sens que nous donnerons au connecteur « et ». $A \wedge B$ est ainsi cette proposition qui est vraie si et seulement si A et B sont vraies. De la même manière, on dira :

- $A \vee B$ est cette proposition qui est vraie si et seulement si l'une des deux propositions, A ou B, est vraie.
- $\neg A$ est cette proposition qui est vraie quand A est fausse et qui est fausse quand A est vraie.
- $A \Rightarrow B$ est cette proposition qui n'est fausse que lorsque A est vraie alors que B est fausse.
- $A \Leftrightarrow B$ est cette proposition qui est vraie si et seulement si A et B ont la même valeur de vérité.

Ces définitions s'expriment aussi au moyen des tables suivantes.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

A	$\neg A$
1	0
0	1

Tables de vérité

Considérons donc maintenant une proposition composée comme $((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg (p \vee r)))$. Nous admettrons que son sens est donné par les valeurs de vérité qu'elle prend en fonction des diverses situations possibles. Nous entendons par « situation possible » toute manière de donner une valeur 1 ou 0 à chaque lettre (ici, p, q, r). Evidemment, si l'expression contient une seule lettre p, il y aura seulement deux situations possibles ($p = 0$ et $p = 1$), si elle en contient 2, il y aura 4 situations possibles, si elle en contient 3, 8 situations possibles et ainsi de suite (si elle en contient n, 2^n situations possibles). On appelle **table de vérité de la proposition** la table qui associe *à chaque situation possible la valeur de vérité de la proposition quand cette situation est réalisée*.

Exemple :

p	q	r	$q \vee r$	$(p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \vee r$	$\neg (p \vee r)$	$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg (p \vee r)))$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1

Une proposition est **une tautologie** si et seulement si sa table de vérité ne contient que des « 1 ». C'est une **contradiction** (ou une **antilogie**) si et seulement si elle ne contient que des « 0 ».

Deux propositions A et B sont dites **tautologiquement équivalentes** ($A \equiv B$) si et seulement si elles ont la même table de vérité. Cette équivalence nous tiendra lieu d'égalité. On peut en effet remplacer dans une expression φ quelconque n'importe quelle proposition A qui y figure comme sous-formule par une proposition B qui lui est tautologiquement équivalente.

Structure d'algèbre de Boole

On peut alors faire une liste d'équivalences tautologiques qui nous permettent de retrouver les axiomes du calcul booléen.

$A \vee B \equiv B \vee A$ (commutativité) $\quad$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (associativité) $\quad$ $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

$A \vee A \equiv A$ (idempotence) $\quad$ $A \wedge A \equiv A$

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\quad$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributivité)

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ $\quad$ $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Afin de compléter la structure d'algèbre de Boole, nous introduirons deux **constantes**, qu'on notera T et $\perp$. T est toujours **vraie**, et $\perp$ toujours **fausse**, de sorte que bien sûr on ait :

$A \vee \perp \equiv A$ $\quad$ $A \wedge T \equiv A$ (élément neutre)

$A \vee T \equiv T$ $\quad$ $A \wedge \perp \equiv \perp$ (élément absorbant)

On a aussi :

$A \wedge \neg A \equiv \perp$ $\quad$ $A \vee \neg A \equiv T$ (complémentarité)

Ainsi que les règles de De Morgan :

$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ $\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Exercices :

1) Montrer que $(A \Rightarrow \bot) \equiv \neg A$ et que $(T \Rightarrow A) \equiv A$
2) Montrer que $(A \Rightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee B)$
3) Montrer que les formules suivantes sont correctes syntaxiquement et sont des tautologies :
    a. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$
    b. $(((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$
    c. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
    d. $((A \Rightarrow (\neg A)) \Rightarrow (\neg A))$
4) Les phrases suivantes ont-elles le même sens :
    a. La grève ne s’arrêtera que si les revendications sont satisfaites
    b. La grève s’arrêtera si les revendications sont satisfaites
    c. La grève ne s’arrêtera pas, à moins que les revendications soient satisfaites
5) Dans l’exercice précédent, à quelle table de vérité correspond le connecteur « à moins que » ? (« à moins que » est considéré comme synonyme de « sauf si »).
6) Sur quelle tautologie repose le fait que la phrase « Si le temps est clair et s’il ne fait pas froid, alors nous partirons en mer » a la même signification que la phrase « Si le temps est clair, alors s’il ne fait pas froid, nous partirons en mer » ?
7) Calculer la négation de la proposition composée :

    $((p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (q \wedge \neg r))$

    (en tentant de se ramener à la forme la plus simple possible)
8) Quand est-il faux que :
    a. Si le temps est clair alors les bateaux sortent du port et la vue porte loin
    b. Si la marée monte, alors les bateaux sortent, sauf si l’orage se prépare

-