

Introduction à la sémantique formelle

Alain Lecomte
Master de Sciences du Langage, Paris 8 - ENS
Cours n°1

Outline

- 1 Qu'est-ce que la sémantique formelle?
- 2 Qu'est-ce qu'un langage formel?
- 3 Signification et vérité
- 4 La logique des prédicats
 - Frege
 - Le paradoxe de Russell
 - L'idée de type

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Objectifs

- La **syntaxe** formelle est une théorie de la manière dont sont construites les phrases d'une langue L
- La **sémantique** formelle est une théorie de la manière dont ces phrases peuvent être interprétées du point de vue du sens

En quoi ces théories sont -elles dites **formelles**?

- nous ne prenons en compte que **la forme** des énoncés
 - on pourrait prendre en compte des contenus intuitifs, spiritualistes, qui n'ont pas de manifestation concrète
 - la forme d'un énoncé est sa seule caractéristique tangible, admise par tous les locuteurs d'une langue, on peut donc en faire une théorie
- nous essayons de représenter la signification des énoncés au moyen d'un **langage formel**
 - si ce n'était pas le cas : risque de régression infinie
 - un langage formel est **non ambigu**

Qu'est-ce qu'un langage formel?

Un langage formel est un **système** abstrait, doté d'un ensemble dénombrable de **symboles** et d'un nombre fini de **règles**.

En général on demandera qu'un tel langage soit:

- **non ambigu** (chaque expression signifiante est dotée d'une seule signification)
- **récuratif** ou, au moins, "**récurivement énumérable**"

Deuxième point:

soit une expression quelconque P

- Cas idéal: on peut toujours en un temps fini déterminer si oui ou non elle appartient au langage: on dit que le langage est **récuratif** ou **décidable**
- Cas plus faible: étant donné une expression correcte, on peut toujours arriver au bout d'un temps fini à dire qu'elle est correcte, mais si elle est incorrecte.... On dit en ce cas que le langage est seulement **récurivement énumérable** ou **semi-décidable**

Qu'est-ce qu'un langage formel? - suite

Un ensemble de symboles : $p, q, r, s, \dots, \wedge, \vee, \neg, \implies, (,)$

Un ensemble de règles :

- $p, q, r, s, \dots$, sont des expressions correctes
- si A est une expression correcte, $(\neg A)$ aussi en est une
- si A, B sont des expressions correctes, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \implies B)$ sont aussi des expressions correctes

Exercice: étant donnée l'expression

$((p \wedge q) \vee ((\neg q) \implies r) \implies (\neg(p \wedge r)))$ dire si elle est correcte.

NB: on s'intéresse ici uniquement à la correction **syntaxique**.

La correction **sémantique** de ces expressions (c'est-à-dire leur **vérité**) est une autre histoire.

Signification et vérité

Retour au **premier point** (un langage non ambigu):

- Ceci suppose que les expressions aient une **signification**
- La solution la plus simple consiste à donner comme signification une valeur choisie dans un ensemble fini
- En général, on choisit la notion de **valeur de vérité**

Dans l'exemple précédent, certaines expressions ont une valeur de vérité égale à **1**, d'autres une valeur de vérité égale à **0**

On en vient à la **thèse de G. Frege**:

La signification d'une phrase réside dans ses conditions de vérité

Comprendre la signification de P c'est savoir à quelles conditions P est vraie

Richesse d'expression d'un langage

Le langage de l'exemple est manifestement trop pauvre pour exprimer les significations du langage ordinaire

cf. **si l'auteur de Moby Dick est Herman Melville alors le soleil se lève 365 fois dans l'année**

je ne peux QUE assigner des lettres p, q aux deux propositions de cette phrase et obtenir comme représentation: $p \implies q$

qui est **vraie** parce que p et q sont toutes les deux vraies même représentation et même raisonnement avec:

si la Place de la Concorde est à Paris, alors le soleil se lève 365 fois dans l'année

Un formalisme pour analyser les phrases

G. Frege reprend et reformule l'antique théorie d'Aristote concernant la division entre **sujet** et **prédicat**:
que l'on ait:

les Grecs ont battu les Perses à la bataille de Platée

ou

les Perses furent battus par les Grecs à la bataille de Platée

on infère les mêmes conséquences, donc elles ont "même signification" (ou, dit Frege: "*même contenu conceptuel*")

or, elles ont des représentations sujet/prédicat différentes.

Frege remplace les notions de sujet et de prédicat par celles d'**objet** et de **fonction**

les Grecs ont battu les Perses = $\phi(\Gamma, \Pi)$

Logique des prédicats

Cela conduit à la logique des prédicats

Problème rencontré par Frege: la **circularité** (paradoxe de Russell, 1901)

A priori, rien n'empêche qu'une fonction soit appliquée à elle même (cf. "être un prédicat est un prédicat" : $\phi(\phi)$ est vrai). Mais alors $\neg\phi(\phi)$ a aussi un sens, celui de "ne pas s'appliquer à soi-même". Soit donc Φ la fonction "ne pas s'appliquer à soi-même". Est-ce que $\Phi(\Phi)$ ou bien est-ce que $\neg\Phi(\Phi)$?

- si $\Phi(\Phi)$, alors "ne pas s'appliquer à soi-même" s'applique à soi-même, ce qui veut dire que "ne pas s'appliquer à soi-même" s'applique à "ne pas s'appliquer à soi-même", donc "ne pas s'appliquer à soi-même" ne s'applique pas à soi-même, c'est-à-dire: $\neg\Phi(\Phi)$
- si $\neg\Phi(\Phi)$, alors "ne pas s'appliquer à soi-même" ne s'applique pas à soi-même, ce qui veut dire que "ne pas s'appliquer à soi-même" ne s'applique pas à "ne pas s'appliquer à soi-même", donc "ne pas s'appliquer à soi-même" s'applique à soi-même, c'est-à-dire: $\Phi(\Phi)$

Logiques d'ordres différents

Alors, il faut **hiérarchiser** les entités.

Il y a des entités d'ordre **0** (les **individus**), des entités d'ordre **1** (les **propriétés d'individus**, ou **ensembles d'individus**), des entités d'ordre **2** (les **propriétés des propriétés qu'ont les individus**, ou **ensembles d'ensembles**), et ainsi de suite...

On convient qu'une fonction d'ordre n ne peut s'appliquer qu'à un objet d'ordre $n - 1$

On appelle **logique du premier ordre** la logique qui ne comporte que des entités d'ordre 0 ou 1

Les autres sont des logiques dites d'ordre supérieur
parmi elles on distinguera la logique **du second ordre**