Exercices sur les catégories, les prégroupes et le calcul symétrique

A. Lecomte

février 2013

1. Démontrer que $\wp$, qui, à tout ensemble E, associe l'ensemble de ses parties, $\wp(E)$, est un foncteur de **Ens** dans **Ens**.
2. Soit S un ensemble. Soit X^S l'ensemble des fonctions de S dans X. Démontrer que la fonction $X \mapsto X^S$ est la partie "objet" d'un foncteur de **Ens** dans **Ens** et que l'évaluation $e_X : X^S \times S \to X$, définie comme la fonction qui, à tout couple (f, s) formé d'une fonction de S dans X et d'un élément de S associe $f(s)$ est une transformation naturelle.
3. Démontrer que tout objet X avec des flèches $p_A : X \to A$ et $p_B : X \to B$ satisfaisant la définition d'un produit de A et de B est isomorphe à $A \times B$.
4. Démontrer que, $< \, , \, >$ désignant la fonction produit (si $f : C \to A$ et $g : C \to B$, alors $< f, g >: C \to A \times B$, de manière que $< f, g > (x) = (f(x), g(x))$) et $\circ$ leur composition, on a : $< f \circ h, g \circ h >=< f, g > \circ h$
5. Sachant que, si $A \times C$ et $B \times D$ sont des produits, alors pour toute paire de flèches ($f : A \to B$, $g : C \to D$) on définit le produit $f \times g : A \times C \to B \times D$ par la flèche $< f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 >$, démontrer que $(f \times h) \circ < g, k >=< f \circ g, h \circ k >$
6. Soit $f : B \to C$ une flèche dans **Ens** et soit $A \subset C$. Démontrer que l'objet $f^{-1}(A)$ muni des deux flèches : $\subset: f^{-1}(A) \to B$ (injection inclusive) et $f_{|f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \to A$ est un pullback pour les flèches f et $\subset: A \to C$.
7. Soit $f : A \to C$ et $g : B \to C$ (deux flèches de **Ens** qui ont le même co-domaine), montrer que leur pullback est le sous-ensemble suivant de $A \times B$:

   $$P = \{(a, b); a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

   avec les flèches f' et g' définies par : $f'(a, b) = b$ et $g'(a, b) = a$.
8. Démontrer que, dans le calcul de Lambek symétrique (ou logique bilinéaire),

   $$(s \oslash s) \obslash sn \to s/(sn \setminus s)$$

9. Faire la déduction de la correction de *Alice suspects someone is cheating* avec l'assignation de types suivante (et en respectant la structure en constituants) :

   $$\begin{array}{lcl} Alice & : & sn \\ suspects & : & (sn \setminus s)/s \\ someone & : & (s \oslash s) \obslash sn \\ is\ cheating & : & sn \setminus s \end{array}$$