Partiel de logique **le 20 mai 2014**
Licence de Sciences du Langage

1- De l'ensemble de prémisses suivant :

Les seuls animaux de cette maison sont des chats
Quand je déteste un animal, je l'évite soigneusement
Aucun animal ne s'attache jamais à moi, excepté ceux qui sont dans la maison
Je déteste les animaux qui ne s'attachent jamais à moi

peut-on déduire que *j'évite soigneusement les chats* ? ou, au contraire, que *j'évite soigneusement tous les animaux sauf les chats* ?

Réponse : je désigne par :
M : la classe des animaux de cette maison,
C : la classe des chats,
D : la classe des animaux que je déteste
E : la classe des animaux que j'évite
A : la classe des animaux qui s'attachent à moi

On obtient :
Les seuls animaux de cette maison sont des chats
Traduit par : $M \subset C$
Quand je déteste un animal, je l'évite soigneusement
Traduit par : $D \subset E$
Aucun animal ne s'attache jamais à moi, excepté ceux qui sont dans la maison
Traduit par :$A = M$
Je déteste les animaux qui ne s'attachent jamais à moi
Traduit par : $\bar{A} \subset D$

D'où la chaîne d'inclusions : $\bar{C} \subset \overline{M} = \bar{A} \subset D \subset E$
(se souvenir que $A \subset B$ *est équivalent à* $\overline{B} \subset \bar{A}$ *et que* $\bar{\bar{A}} = A$*)*
D'où on déduit que j'évite soigneusement les animaux qui ne sont pas des chats.

2- Que peut-on déduire des prémisses suivantes :

Tout animal qui aime à contempler la lune est apte à devenir un animal familier
Aucun animal n'est carnivore, à moins qu'il n'aille rôder dehors la nuit
Les kangourous ne sont pas aptes à devenir des animaux familiers
Les animaux qui vont rôder dehors la nuit aiment toujours contempler la lune

Réponse : même raisonnement avec :
L : la classe des animaux qui aiment à contempler la lune
F : la classe des animaux aptes à devenir familiers
C : la classe des carnivores
R : les animaux qui rodent la nuit
K : les kangourous

On obtient : $C \subset R \subset L \subset F \subset \overline{K}$, d'où $K \subset \bar{C}$
Ce qui entraîne que les kangourous ne sont pas carnivores.

3- L'argument suivant est-il correct :

Il y aura déficit budgétaire sauf si le taux des impôts est relevé. S'il y a déficit budgétaire, l'offre de biens publics sera réduite. Donc, si le taux des impôts est relevé, l'offre de biens publics ne sera pas réduite.

Avec p : « il y aura déficit budgétaire », q : « le taux des impôts est élevé », r : « l'offre de biens publics sera réduite », on a : prémisses : pwq et $p \Rightarrow r$*, et conclusion :* $q \Rightarrow \neg r$*. La conclusion ne peut pas être déduite des prémisses. Prenons en effet la situation où p est faux et q et r sont vrais, alors pwq est vrai,* $p \Rightarrow r$ *est vrai, mais* $q \Rightarrow \neg r$ *est faux. Donc on ne peut pas dire que dans toutes les situations où les prémisses sont vraies, la conclusion l'est aussi.*

4- Les formules suivantes sont-elles des tautologies :

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$$

Oui, ce sont des tautologies !

Donner des exemples de règles d'inférence évidentes qu'on peut en déduire.

On peut par exemple en déduire les règles d'inférence suivantes :

$A \models B \Rightarrow A$ (si A est vraie, alors toute formule $B \Rightarrow A$ est vraie)

$$(A \Rightarrow B) \models ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$\{(A \Rightarrow B), ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C))\} \models (A \Rightarrow C)$$

$$(A \Rightarrow B) \models ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$$

$\{(A \Rightarrow B), (A \Rightarrow \neg B)\} \models \neg A$ (si A implique à la fois B et non-B alors A est faux)

5- Trouver une forme normale disjonctive pour la formule :

$$((B \wedge C) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg B \vee C)))$$

Réponse : $((B \wedge C) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg B \vee C))) \equiv \neg (B \wedge C) \vee (A \Rightarrow (\neg B \vee C))$

$$\equiv \neg (B \wedge C) \vee (\neg A \vee (\neg B \vee C))$$

$$\equiv (\neg B \vee \neg C) \vee (\neg A \vee (\neg B \vee C))$$

$$\equiv \neg B \vee \neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee C$$

$$\equiv \neg B \vee \neg B \vee \neg A \vee (\neg C \vee C)$$

$$\equiv (\neg B \vee \neg A) \vee T$$

$\equiv T$

6- L'ensemble de propositions suivant est-il satisfaisable ou, au contraire, contradictoire ?

$\{ p \wedge r, p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, \neg q \vee \neg s\}$

Réponse : contradictoire.

$p \wedge r$ donne p, et r.

p et $p \Rightarrow q$ donnent q

r et $r \Rightarrow s$ donnent s

s et $\neg q \vee \neg s$ donnent $\neg q$

donc on a q et $\neg q$, d'où : contradiction.

Peut-on en déduire que :

$\{ p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, \neg q \vee \neg s\} \models \neg p \vee \neg r$

Oui, car si de $\{A\} \cup F$ on peut déduire une contradiction, alors de F on peut déduire $\neg A$. ici, on prend pour A la formule $p \wedge r$, dont la négation est $\neg p \vee \neg r$.