Introduction à la Ludique

Marie-Renée Fleury, Alain Lecomte and Myriam Quatrini

Outline

1. D'où vient la ludique?
   - Syntaxe et sémantique
   - Polarité
2. Règles de la ludique
   - Règle positive, règle négative
   - *Daimon* et *Fax*
3. Dessins et desseins
   - Dessins
   - Desseins et stratégies
   - Chroniques et desseins
   - Normalisation
4. Comportements
   - Ordre sur les desseins
   - Comportements
   - Incarnation

monisme en logique

- traditionnellement, le logicien vit dans un univers dualiste
  - *preuve / contre-modèle*
- avec la ludique
  - *preuve / contre-preuve*
- analogies
  - *argumentation / réfutation*
  - *JEU* : *proposant / opposant*

quel rapport avec d'autres approches dialogiques?

- Logique linéaire : Blass, Lamarche...
- Lorenzen, Hintikka...

Ces approches sont statiques (les ”règles” sont prédéfinies)
En ludique : l'approche est ”dynamique”. On s'intéresse à la manière dont les ”stratégies” interagissent et permettent ensuite de définir des comportements. Les ”bons” objets sont ceux qui ont des comportements intéressants du point de vue de l'interaction.

tests

Comment reconnaître une preuve?

- par les tests qu'elle passe (et qu'elle réussit!)
  - on teste $(A \wedge B)$ en testant A ou en testant B
  - on teste $(A \vee B)$ en testant A et en testant B
  - on teste $(A \Rightarrow B)$ en admettant A et en testant B
- test pour A = preuve de $\neg A$?
- mais... si A est prouvable? une preuve de $\neg A$ ne peut pas exister!!!
- d'où la nécessité d'élargir l'espace des preuves

tests

Comment reconnaître une preuve?

- par les tests qu'elle passe (et qu'elle réussit!)
  - on teste $(A \wedge B)$ en testant A ou en testant B
  - on teste $(A \vee B)$ en testant A et en testant B
  - on teste $(A \Rightarrow B)$ en admettant A et en testant B
- test pour A = preuve de $\neg A$?
- mais... si A est prouvable? une preuve de $\neg A$ ne peut pas exister!!!
- d'où la nécessité d'élargir l'espace des preuves

tests

Comment reconnaître une preuve?

- par les tests qu'elle passe (et qu'elle réussit!)
  - on teste $(A \wedge B)$ en testant A ou en testant B
  - on teste $(A \vee B)$ en testant A et en testant B
  - on teste $(A \Rightarrow B)$ en admettant A et en testant B
- test pour A = preuve de $\neg A$?
- mais... si A est prouvable? une preuve de $\neg A$ ne peut pas exister!!!
- d'où la nécessité d'élargir l'espace des preuves

des "contre-preuves"

"Contre-preuve" pour A = Preuve de ¬A

la conjonction est interprétée de deux manières différentes:

- implication : A et ¬B utilisés en même temps
- disjonction : l'un des deux seulement, A ou B, est utilisé

d'où:

- $(A \oplus B)^t = A^t \& B^t$
- $(A \& B)^t = A^t \oplus B^t$
- $(A \multimap B)^t = A \times B^t$

des jeux

On est conduit à une conception interactive (cf. Girard: Géométrie de l'Interaction)

- un Agent P cherche à établir une preuve
- face à un second agent, O, qui cherche à établir une "contre"-preuve
- les pas de l'interaction sont vus comme des "coups" ou **actions**
- une **partie** est une suite alternée de coups signés (P ou O)
- une **stratégie** est une fonction partielle de l'ensemble des parties se terminant par un coup O vers les coups possibles de P

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + parapreuves = épreuves

parapreuves et paralogismes

Les preuves doivent correspondre à des stratégies gagnantes (pour P), mais
les stratégies perdantes?
rep.: des *parapreuves*
mais alors...
il faut des paralogismes!! Les paralogismes ne doivent cependant pas empêcher:

- la dynamique de fonctionner (élimination des coupures)

il faut par exemple...

- ... admettre $\vdash \Gamma$
- ... le *daimon*

preuves + *parapreuves* = *épreuves*

complétude et cohérence en ludique

Soit une formule A. On notera $|A|$ le jeu associé à A. Si π est une preuve de A, alors $|\pi|$ est son interprétation comme stratégie dans le jeu $|A|$.

THEOREME DE COMPLETUDE:

> *si σ est une stratégie gagnante pour le jeu $|A|$, alors il existe une preuve π de A telle que $\sigma = |\pi|$*

THEOREME DE COHERENCE:

> *si π est une parapreuve de A, alors $|\pi|$ est une stratégie pour le jeu $|A|$; de plus si π est une preuve, c'est-à-dire n'utilise aucun paralogisme, alors $|\pi|$ est gagnante.*

polarisation

J-M. Andréoli : *focusing proofs*
discipline pour rechercher efficacement les preuves : respecter une alternance de pas *positifs* et *négatifs*
se base sur:

- certains connecteurs sont *déterministes* et *réversibles* (= **négatifs**) la règle d'introduction à droite correspondante, qui peut être lue dans les deux sens, peut être appliquée d'une seule manière

Example

$$\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma}[\wp] \qquad \frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \& B, \Gamma}[\&]$$

connecteurs positifs

ce n'est pas le cas de $[\otimes]$ (comment scinder les contextes?) ni de $[\oplus]$ (continuer sur A ou sur B?)

Example

$$\frac{\vdash A, \Gamma \qquad \vdash B, \Gamma'}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Gamma'}[\otimes] \qquad \frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma}[\oplus_g] \qquad \frac{\vdash B, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma}[\oplus_d]$$

- une formule est dite *positive* (resp. *négative*) si son connecteur principal est positif (resp. négatif)

focusing proofs

Il se trouve que:

- il est possible de faire une preuve de telle manière que:
  - tant qu’il y a des formules négatives, choisir au hasard l’une d’elles
  - dès qu’il n’y en a plus, choisir (non déterministe) une formule positive, mais **continuer à focaliser** sur elle
- on peut considérer les ”blocs” positifs et les ”blocs” négatifs : des *connecteurs synthétiques*
- les formules *négatives* seront notées positivement à gauche

”l'allure” d'une preuve focalisée

En appliquant cette discipline, et en regroupant en blocs les pas de même signe:

- un séquent contient toujours *au plus une formule négative* (si deux: on regroupe)
- si la formule active est positive : toutes les autres le sont aussi (sinon, on aurait choisi la négative) et toutes les prémisses ont exactement une formule négative (sinon, aurait été intégré au conn. positif)
- si la formule active est négative : toutes les autres formules du séquent sont positives (sinon, un pas négatif n'aurait pas été intégré) et chaque prémisse de la règle est un séquent ne contenant que des formules positives

classes d'équivalence de preuves

Deux preuves qui diffèrent uniquement par l'ordre dans lequel sont effectuées des règles de même polarité sont équivalentes (pour la recherche de preuves, pour l'élimination des coupures)

- on peut "quotientiser" les preuves de la LL par cette relation d'équivalence
- on finit par s'abstraire des noms de formules pour ne plus envisager que les **lieux** où elles sont enregistrées

Règles

d'où seulement deux schémas de règles:

REGLE POSITIVE

$$\frac{\ldots \quad \xi \star i \vdash \Lambda_i \quad \ldots}{\vdash \xi, \Lambda} (+, \xi, I)$$

- i parcourt I
- les Λ_i sont deux à deux disjoints et inclus dans Λ

REGLE NEGATIVE

$$\frac{\ldots \quad \vdash \xi \star J, \Lambda_J \quad \ldots}{\xi \vdash \Lambda} (-, \xi, \mathcal{N})$$

- J parcourt $\mathcal{N}$
- les Λ_J sont inclus dans Λ

commentaires

On s'est débarrassé de toutes références à des formules explicites (des lettres), comme à toute mention de connecteur particulier

- Formules repérées par des *adresses* (ou *loci*)
- Les *loci* sont des suites d'entiers (*biais*)
- Un ensemble de biais = une *ramification*
- $\star$: concaténation des *biais*
- un objet $\Gamma \vdash \Theta$ où Γ est un *locus* et Θ une suite de *loci*, est appelé une *fourche*, positive si $\Gamma = \emptyset$, négative sinon

commentaires - 2

- cas de la règle positive: les prémisses sont toutes négatives, une par adresse appartenant à une certaine ramification I, donc le *locus* de chacune s'obtient en concaténant le locus de base ξ avec chaque biais $\in I$
- cas de la règle négative : les prémisses doivent toutes être positives, chacune contient donc une suite de formules positives, chacune de ces formules étant localisée aux adresses appartenant à un certain ensemble J, les J appartenant à un ensemble de ramifications $\mathcal{N}$

le *daimon*

Dai

$$\frac{}{\vdash \Lambda}\dagger$$

- c'est une règle positive
- c'est une *parapreuve*

une règle d'identité?

- Problème : il n'y a pas à proprement parler de règle d'identité
- pas de "formule" : pas de possibilité de les identifier
- on ne peut pas identifier deux *loci*
- reste seulement la possibilité de reconnaître que des ensembles d'adresses se correspondent par translation : *fax*

$$Fax_{\xi,\xi'} = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\ldots \quad Fax_{\xi_{i1},\xi'_{i1}} \quad \ldots}{\ldots\xi' \star i \vdash \xi \star i \ldots}\;(+,\xi',J_1)}{\ldots \quad \vdash \xi \star J_1, \xi' \quad \ldots}\;(-,\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))}{\xi \vdash \xi'}$$

l'infinité des preuves

prouver "l'identité" de deux formules logées en ξ et ξ' se ramène à les décomposer récursivement
cf. Tronçon, p. 322 :

> *En fait, le processus par lequel se décompose logiquement une formule est le résultat d'une volonté, c'est-à-dire que la recherche de démonstration continue tant que l'agent "souhaite continuer" et non pas jusqu'à ce que la formule indique, par elle-même, une quelconque identité.*

Dessins

Definition

Un **dessin** est un arbre dont tous les noeuds sont des **fourches** $\Gamma \vdash \Delta$ dont la racine est appelée **base** (ou conclusion), et qui est construit en utilisant:

- le daimon
- la règle positive
- la règle négative

un dessin...

Example

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{011 \vdash \quad 012 \vdash 02}{\vdash 01, 02}(+, 01, \{1,2\}) \quad \dfrac{031 \vdash \quad 033 \vdash 01}{\vdash 01, 03}(+, 03, \{1,3\})}{0 \vdash}(-, 0, \{\{1,2\},\{1,3\}\})}{\vdash <>}(+, <>, \{0\})$$

- un pas négatif donne un foyer fixe et un ensemble de ramifications
- un pas positif choisit sur cette base un foyer et choisit d'autre part une ramification

Une illustration

- la base : une question (*quels sont les lieux où tu vas aller cet été?*)
- règle négative: un éventail de réponses possibles est fourni (*Rome* et *Naples* ou *Rome* et *Florence*)
- en cas de choix 1 : règle positive sur la base "Rome", nouvelles questions (*avec qui tu y vas?* et *comment tu y vas?*)
- en cas de choix 2 : règle positive sur la base "Florence", nouvelles questions (*avec qui tu y vas?* et *combien de temps tu y restes?*)

un autre dessin

Example

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{011 \vdash \quad 012 \vdash 02}{\vdash 01, 02}(+, 01, \{1, 2\}) \quad \dfrac{}{\vdash 01, 03}\dagger}{0 \vdash}(-, 0, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})}{\vdash <>}(+, <>, \{0\})$$

- cette fois, une branche est terminée par le *daimon*
- si la réponse est "Rome et Florence", je m'estime satisfait, le dialogue est arrêté

Proposant et Opposant

- les "actions" positives sont celles du **proposant** : il choisit un foyer ξ et une ramification I, c'est un "coup" noté (+, ξ, I)
- les "actions" négatives sont celles de **l'opposant** : il choisit un foyer ζ avec $\zeta = \xi i$ pour un $i \in I$ et une ramification J, c'est un "coup" noté (-, ζ, J)
- du point de vue du **proposant** : toutes les actions possibles de **l'opposant** ont été prévues
- dans une **partie**, **l'opposant** ne peut bien sûr choisir qu'un seul J parmi tous les coups possibles

chroniques

ceci conduit à la notion de **chronique**

Definition

Une **chronique** de base $\Gamma \vdash \Delta$ est une suite non vide alternée d'actions $k_0, ..., k_n$, où $k_i = (\epsilon, \xi_i, I_i)$, ϵ étant une polarité, ξ_i une adresse appelée *foyer* et I_i un ensemble d'entiers, de telle sorte que:

- si la base est négative (resp. positive), k_0 a la polarité $-$ (resp. $+$),
- seule la dernière action, k_n peut être le daimon = $(+, \dagger)$,
- une action négative k_i a pour foyer soit l'élément unique de Γ (auquel cas c'est la première action), soit un élément de $\xi_{i-1} \star I_{i-1}$,
- une action positive k_i a pour foyer un élément ξ_i de Δ ou bien un élément de $\xi_q \star I_q$, où $(-, \xi_q, I_q)$ est une action négative précédente,
- les foyers sont deux à deux distincts

Illustration

Dans le premier dessin, le questionneur doit:

- poser sa question, c'est un "coup" : $(+, <>, \{0\})$
- être prêt à réagir à toute réponse de l'opposant
  - si cette réponse est : $(-, 0, \{1, 2\})$, alors poser les questions 1 et 2, c'est un coup $(+, 01, \{1, 2\})$
  - si cette réponse est : $(-, 0, \{1, 3\})$, alors poser les questions 1 et 3, c'est un coup $(+, 01, \{1, 2\})$

Dans le deuxième dessin,

- si la réponse est : $(-, 0, \{1, 3\})$, alors prévoir d'utiliser son *daimon*

Illustration

Example

$(+, <>, 0), (-, 0, \{1, 2\}), (+, 01, \{1, 2\})$
$(+, <>, 0), (-, 0, \{1, 3\}), (+, \dagger)$

Remarque: une action négative a toujours pour foyer un lieu immédiatement précédent dans la même chronique.

Desseins

Definition

Un **dessein** de base $\Gamma \vdash \Delta$ est un ensemble $\mathcal{D}$ de chroniques de base $\Gamma \vdash \Delta$ tel que:

- $\mathcal{D}$ est une forêt,
- les chroniques de $\mathcal{D}$ sont deux à deux cohérentes (si deux chroniques diffèrent, c'est à partir d'une action négative, et à partir de ce moment-là, elles n'ont plus jamais les mêmes foyers),
- si une chronique s'arrête, alors sa dernière action est positive,
- si la base est positive, alors $\mathcal{D}$ est non vide.

représentation des stratégies

P

$$P:\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots}{011\vdash}\quad\dfrac{\ldots}{012\vdash 02}}{\vdash 01,02}\qquad\dfrac{}{\vdash 01,03}\dagger}{0\vdash}}{\vdash <>}$$

O

$$O_1:\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots}{\vdash 011,012}}{01\vdash}\qquad\dfrac{}{02\vdash}}{\vdash 0}}{<>\vdash}\qquad\qquad O_2:\quad \dfrac{\dfrac{01\vdash\quad 03\vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}$$

normalisation

Definition

Une **coupure** est la coïncidence de deux lieux dans les bases de deux desseins.

Par exemple, entre $\vdash \Gamma, \Delta, \xi$ et $\xi \vdash \Omega$
On rencontre souvent une coupure entre $\vdash \xi$ et $\xi \vdash$, c'est ce que l'on appelle un réseau clos (voir plus loin pour plus de précision).

coupure entre deux desseins

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{011\vdash}\quad\dfrac{\dots}{012\vdash 02}}{\vdash 01,02}(01,\{1,2\})\qquad\dfrac{}{\vdash 01,03}\dagger}{0\vdash}\{\{1,2\},\{1,3\}\}}{\vdash<>}(<>,\{0\})\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\vdash 011,012}}{01\vdash}\quad\dfrac{}{02\vdash}}{\vdash 0}\{1,2\}}{<>\vdash}\{\{0\}\}$$

- il y a coupure entre $\vdash<>$ et $<>\vdash$
- puis une coupure entre $0\vdash$ et $\vdash 0$
- à ce stade, par exemple, la première règle, positive, du deuxième dessin est "sur" une ramification I
- la première règle, négative, du premier dessin est "sur" un ensembles de ramification $\mathcal{N}$
- $I\in\mathcal{N}$

élimination des coupures, suite

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{011 \vdash} \quad \dfrac{\dots}{012 \vdash 02}}{\vdash 01, 02}\{1,2\} \qquad \dfrac{\dfrac{\dots}{\vdash 011, 012}}{01 \vdash}\{\{1,2\}\} \qquad \dfrac{}{02 \vdash}$$

élimination des coupures, suite

$$\frac{\ldots}{011 \vdash} \qquad \frac{\ldots}{012 \vdash 02} \qquad \frac{\ldots}{\vdash 011, 012}$$

convergence et divergence

Le processus continue jusqu'à ce qu'une des deux conditions suivantes soit satisfaite:

- **divergence** : la ramification I sur laquelle est défini le dessin positif n'appartient pas au répertoire $\mathcal{N}$ sur lequel est défini le dessin négatif
- **convergence** : l'un des dessins se termine sur une fourche obtenue au moyen du *daimon*, alors la normalisation termine en forme normale *Dai*.

Remarque: c'est ce que l'on obtient avec:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cdots}{011 \vdash} \quad \cfrac{\cdots}{012 \vdash 02}}{\vdash 01, 02}\{1,2\} \qquad \cfrac{}{\vdash 01, 03}\dagger}{0 \vdash}\{\{1,2\},\{1,3\}\} \qquad\qquad \cfrac{01 \vdash \quad 03 \vdash}{\vdash 0}\{1,3\}$$

Terminaison sur *Dai*

$$\frac{}{\vdash 01, 03}\dagger \qquad 01 \vdash \qquad 03 \vdash$$

qui donne finalement:

$$\frac{}{\vdash}\dagger$$

$$= \mathit{Dai}$$

définition d'un réseau

Un **réseau** est un ensemble fini non vide $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{D}_0, \cdots, \mathfrak{D}_n\}$ de desseins de base $\Theta_p \vdash \Lambda_p$ tels que

- les lieux sont 2 à 2 disjoints ou égaux
- chaque lieu apparait au plus 2 fois : une fois en position positive, l'autre négative, que l'on relie par un lien (une coupure).
- le graphe des bases et des liens-coupures est connexe et acyclique

La base constituée avec les lieux non coupés est la *base du réseau*.
Le *dessein principal* d'un réseau est soit celui qui est positif soit le négatif dont la poignée est non coupée.

Example

$\mathfrak{R} = \vdash \xi, \boxed{\tau} \quad \xi \vdash \alpha, \beta \quad \alpha \vdash \quad \beta \vdash$ est un réseau de base $\vdash \tau$ dont le dessein principal est $\vdash \xi, \tau$

réseau clos

C'est un réseau dont la base est vide ($\vdash$)
dans ce cas, la normalisation construit la forme normale $[[\mathfrak{R}]]$ du réseau par induction sur la première règle (κ) du dessein principal :

- si $\kappa = \dagger$ alors la normalisation termine $[[\mathfrak{R}]] = \mathfrak{Dai}$
- si $\kappa = (\xi, I)$: si $I \notin \mathcal{N}$ où $(\xi, \mathcal{N})$ est l'action du dessein adjoint alors la normalisation échoue.
- si $\kappa = (\xi, I)$ et $I \in \mathcal{N}$. Soit $\mathfrak{D}_i$ le sous-dessein de $\mathfrak{D}$ de base $\xi.i \vdash$ et $\mathfrak{E}'_I$ le sous-dessein de $\mathfrak{E}$ de base $\vdash \xi.I$.

On définit $\mathfrak{S}$ en remplaçant $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ par $(\mathfrak{D}_i)_{i\in I}$, $\mathfrak{E}'_I$. Notons $\mathfrak{S}'$ sa composante connexe.

$$[[\mathfrak{R}]] = [[\mathfrak{S}']]$$

orthogonalité

Definition

Deux desseins $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ de bases opposées ($\xi \vdash$ et $\vdash \xi$) sont **orthogonaux** lorsqu'ils forment un réseau convergent.

- Soit $\mathfrak{D}$ un dessein de base $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Notons $\mathfrak{E}_0$ un dessein de base $\vdash \xi$ et $\mathfrak{E}_p$ pour $1 \leq p \leq n$ des desseins de base $\sigma_p \vdash$. La famille $(\mathfrak{E}_p)_{0 \leq p \leq n}$ est **orthogonale** à $\mathfrak{D}$, lorsque la normalisation du réseau $[[\mathfrak{D}, (\mathfrak{E}_p)]]$ converge.

`Notation :` $\mathfrak{D} \perp (\mathfrak{E}_p)$.

normalisation et dialogue-1

Example

Soit $\mathfrak{R}$ un objet dessiné, vu comme un enregistrement composé de trois champs :

- les coordonnées de son centre (2 nombres),
- sa forme (carré, cercle, ...) ,
- sa couleur (rouge, vert, bleu, ...).

- $\mathfrak{R}$ est représenté par un dessein de base $\xi \vdash$.
- $\mathfrak{Q}$ va poser une question à $\mathfrak{R}$. Si $\mathfrak{Q}$ lui demande ses coordonnées, sa forme ou sa couleur, il y aura réussite, s'il lui demande sa surface il y aura échec.
- $\mathfrak{Q}$ est représenté par un dessein de base $\vdash \xi$.

normalisation et dialogue-2

$\mathfrak{R}$ attend 3 questions possibles codées par :
1: coordonnées, 2: forme , 3: couleur.

- à la question 1, il répond $(3, 4)$.
- à la question 2, il répond "cercle" (codé par 8).
- à la question 3, il répond "bleu" (codé par 5).

$\mathfrak{Q}$ va lui demander sa couleur (question 3).

- Il attend une réponse entre 1 et 7.
- Il reçoit sa réponse.
- Il remercie.

Ce qui donne

normalisation et dialogue - 3

$\mathfrak{R} =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 131}\emptyset}{\xi 13 \vdash} \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 141}\emptyset}{\xi 14 \vdash}}{\vdash \xi 1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 281}\emptyset}{\xi 28 \vdash}}{\vdash \xi 2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 351}\emptyset}{\xi 35 \vdash}}{\vdash \xi 3}}{\xi \vdash}$$

et

$\mathfrak{Q}_1 =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 31}\dagger \quad \cdots \quad \dfrac{}{\vdash \xi 37}\dagger}{\xi 3 \vdash}(\xi 3,\{\{1\},\cdots,\{7\}\})}{\vdash \xi}(\xi,\{3\})$$

La normalisation du réseau constitué par $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{Q}_1$ converge. Ces desseins sont orthogonaux. $\mathfrak{Q}_1$ obtient la réponse á sa question.

normalisation d'un réseau non clos

Le réseau $\mathfrak{R}$ se réduira alors en un dessein $\mathfrak{D}$ dont la base est constituée par les lieux non coupés du réseau $\mathfrak{R}$.
Il y a en plus des cas précédents de nouvelles possibilités :
Par exemple : le dessein principal est positif et son premier focus n'est pas un lieu coupé du réseau..
On "remonte la coupure" i.e. on recopie les étapes de la normalisation dans le réduit et on remplace $\mathfrak{D}$ par ses sous-desseins $\mathfrak{D}_i$ en transportant les lieux coupés. On n'en garde que les composantes connexes qui sont des réseaux $\mathfrak{R}_i$.

normalisation d'un réseau non clos - exemple

On suppose maintenant que $\mathfrak{Q}$ veut garder la trace de sa réponse. Ce sera le résultat de la normalisation entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{Q}_2$

$\mathfrak{R} =$ (inchangé)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi131}\,\emptyset}{\xi13 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi141}\,\emptyset}{\xi14 \vdash}}{\vdash \xi1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi281}\,\emptyset}{\xi28 \vdash}}{\vdash \xi2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi351}\,\emptyset}{\xi35 \vdash}}{\vdash \xi3}}{\xi \vdash}$$

et

$\mathfrak{Q}_2 =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma31, \xi31}\,\dagger}{\sigma3 \vdash \xi31}\,{\scriptstyle(\sigma3,\{1\})}}{\vdash \xi31, \sigma}\,{\scriptstyle(\sigma,\{3\})} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma37, \xi37}\,\dagger}{\sigma3 \vdash \xi37}\,{\scriptstyle(\sigma3,\{7\})}}{\vdash \xi37, \sigma}\,{\scriptstyle(\sigma,\{3\})}}{\xi3 \vdash \sigma}\,{\scriptstyle(\xi3,\{\{1\},\cdots,\{7\}\})}}{\vdash \xi, \sigma}\,{\scriptstyle(\xi,\{3\})}$$

normalisation et dialogue - 5

Dans ce nouveau scénario :
ξ pose la question 3 (couleur). Il attend une réponse entre 1 et 7.
Après avoir reçu sa réponse, il recopie dans σ la réponse et remercie.
Ce qui donne comme résultat de la normalisation (de la conversation) le dessein qui représente la réponse reçue :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \sigma 3.5}\,\dagger}{\sigma 3 \vdash}\,(\sigma 3,\{5\})}{\vdash \sigma}\,(\sigma,\{3\})$$

pseudo-dessins

un pseudo-dessin particulier est la *Foi* ou *Fid*, c'est le réseau que l'on obtient lorsque, dans le processus de normalisation, il y a divergence. Il s'écrit

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\ \Omega$$

c'est le réseau qu'on utilise pour signifier l'échec de la convergence.
c'est l'ensemble **vide** de chroniques (Ω *n'est pas une règle*, comme l'est $\dagger$).

ordre sur les desseins

Definition

$\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$ si et seulement si tout dessein orthogonal à $\mathcal{D}$ est aussi orthogonal à $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{D}^{\perp} \subset \mathcal{D}'^{\perp}$)

autres formulations:

- $\mathcal{D}'$ est "plus convergent" que $\mathcal{D}$
- ce qui signifie:
  - dans $\mathcal{D}'$ plus de branches négatives que dans $\mathcal{D}$ (converge avec plus de desseins que ne le fait $\mathcal{D}$)
  - et/ou sur certaines branches, la normalisation s'arrête plus vite (le *daimon* est mis plus tôt)

desseins particuliers

- le plus petit diverge maximalement, c'est *Fid*
- le plus grand converge maximalement, c'est *Dai*
    - cas positif:

$$\frac{}{\vdash \Lambda}\,\dagger$$

    - cas négatif:

$$\frac{\dots \quad \dfrac{}{\vdash \xi \star I, \Lambda}\,\dagger \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda}\,(\xi, \wp_f(\mathbb{N}))$$

le sconse

Que se passe-t-il si, dans le cas négatif, on a $\mathcal{N} = \emptyset$?

$$\frac{}{\xi \vdash}\ (\xi, \emptyset)$$

bien sûr, aucun dessein ne peut converger avec celui-ci, sauf *Dai* (l'interlocuteur ne peut choisir aucun *I* dans $\mathcal{N}$), il y aura donc toujours divergence.
c'est un "comportement" particulièrement asocial!
d'où :

le *sconse*!

l'arme absolue

On peut aussi considérer le dessein suivant:

$$\frac{}{\vdash \xi}\,(\xi, \emptyset)$$

aucun dessein de base négative ne peut converger avec lui...
sauf un:

$$\frac{\frac{}{\vdash}\,\dagger}{\xi \vdash}$$

Dans ce cas, pour converger (arriver au consensus), l'opposant ne peut qu'utiliser son *daimon*, autrement dit avouer qu'il a perdu. Ce dessin gagne donc tout le temps.
d'où son nom d'*Arme absolue*!

comportements

Definition

Un **comportement** est un ensemble de desseins (de même base) **C** qui est égal à son bi-orthogonal (**C** = $\mathbf{C}^{\perp\perp}$).

par exemple, un dessein peut engendrer un comportement: soit un dessein $\mathcal{D}$, l'orthogonal de $\mathcal{D}^{\perp}$ contient $\mathcal{D}$, mais il contient aussi tous les desseins $\mathcal{D}'$ tels que $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$. Autrement dit, il est *stable* par sur-dessein.
Le comportement induit par $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des desseins de même base, contenant $\mathcal{D}$ lui-même, ainsi que tous ses sur-desseins (et seulement eux), c'est donc aussi: $\{\mathcal{D}\}^{\perp\perp}$
NB: le comportement induit par $\mathcal{D}$ contient *Dai* (*il est toujours possible d'abréger la discussion au maximum!*)

comportements particuliers : 1

On a vu que

$$\frac{}{\vdash \xi}(\xi, \emptyset) \qquad \frac{\frac{}{\vdash}\dagger}{\xi \vdash}$$

convergent.
Mais

$$\frac{\frac{}{\vdash}\dagger}{\xi \vdash} \qquad \frac{}{\vdash \xi}\dagger$$

convergent aussi.
d'où le comportement:

$$\mathbf{1} = \{\textit{Arme absolue}, \textit{Dai}\}$$

comportements particuliers : $\top$

quel comportement contient le *sconse*?
puisque son orthogonal est vide, son bi-orthogonal contient **tous** les desseins négatifs de même base.
On le note $\top$
Maintenant, le seul dessein qui converge avec **tous** les desseins négatifs est *Dai*
Donc

$$\top^{\perp} = Dai$$

l'incarnation

Definition

Etant donné un dessein $\mathcal{D}$ appartenant à un comportement **C**, il existe dans **C** un plus petit dessein contenu dans $\mathcal{D}$ (son "meilleur représentant"), on l'appelle l'*incarnation de $\mathcal{D}$ par rapport à* **C**.

C'est la plus petite partie d'un dessein qui soit nécessaire pour assurer son appartenance à un comportement.

comportements disjoints

Definition

On appelle **répertoire** un sous-ensemble de $\wp_f(\mathbb{N})$ (= un ensemble de ramifications). Si **G** est un comportement positif sur $\vdash <>$, alors le répertoire de **G**, qu'on note *Dir*(**G**) est l'ensemble des ramifications *I* telles que:
$(+, <>, I)$ soit la première action d'un dessein figurant dans **G**.
Si **G** est un comportement négatif sur $\xi \vdash$, alors le répertoire de **G** est l'ensemble des ramifications *I* pour lesquelless, quel que soit le dessein incarné dans **G**, il a comme action initiale une action $(-, \xi, I)$.

Definition

Deux comportements **G** et **G'** sur la même base sont dits disjoints si leurs répertoires sont disjoints.

délocalisations

On peut toujours, étant donnés deux comportements **G** et **H**, opérer une transformation (ϕ pour l'un et ψ pour l'autre) telle que ϕ(**G**) et ψ(**H**) soient disjoints. On dit alors qu'on les a délocalisés.