”La Ludique” : une introduction

Une nouvelle théorie logique due à J.-Y. Girard, pour laquelle l’objet central est l’interaction.

Les textes de références :

- Girard, J.-Y. (2001) Locus Solum
- Girard, J.-Y. (2004) From Fondation to Ludics

Introduction : A l'origine de la Ludique

- Les sémantiques des jeux
- La recherche d'une "dualité moniste"
- La géométrie de l'interaction

Le développement des sémantiques des jeux

Lorsque l'objet central de la théorie de la démonstration n'est plus la formule logique mais la preuve, l'enjeu de la sémantique est d'interpréter les preuves.

$\rightarrow$ sémantiques dénotationnelles : un invariant du calcul.

$\rightarrow$ sémantiques des jeux : réintroduire la séquentialité et l'aspect dynamique de la sémantique opérationnelle tout en conservant l'aspect mathématique de la sémantique dénotationnelle.

Les jeux sont à deux joueurs P et O. Les jeux sont construits à l'aide des notions suivantes :

- Une **arène** A qui est l'ensemble des coups possibles.
- Une **partie** est une suite alternée finie de coup signés (P ou O).
- Une **stratégie** est une fonction partielle de l'ensemble des parties se terminant par un coup O vers les coups possibles de P.

Le projet d'une dualité "moniste"

Recherche d'une dualité entre objets de même nature.

- En logique classique une approche basée sur la dualité syntaxe/sémantique : *" A est démontrable ssi sa négation n'a pas de modèle"*.
- En logique intuitionniste une vision "moniste" : seules comptent les démonstrations.
- Avec la logique linéaire, on retrouve les symétries de la logique classique et notamment une négation involutive. La possibilité de développer une approche "dualité moniste" apparaît.

On veut :

- exprimer la dualité entre une formule et sa négation comme une dualité entre objets de même nature

- considérer (l'interprétation d') une formule comme l'ensemble de (l'interprétation de) ses preuves,

Un écueil : si une formule est prouvable sa négation vue comme ensemble de ses démonstrations est alors vide.

Premier ingrédient ludique : **"le daimon"**.

Dans une para-preuve (tentative de démonstration) on peut terminer par la règle du *daimon* (axiome généralisé sur n'importe quel ensemble de formules).

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\dagger$$

Poursuite du projet de la GoI

L'objectif de la GoI est de géométriser complètement les preuves : organiser l'interprétation des preuves relativement à une notion d'**orthogonalité**.

En ludique deux para-preuves vont être orthogonales lorsque leur interaction a pour résultat le *daimon*.

Les objets vont être décrits uniquement par ce qui est important lors de l'interaction.

Une notion importante : la notion de polarité (introduite par J.-Y. Girard pour LC)

- les connecteurs positifs : $\otimes$ et $\oplus$
(dont les règles d'introduction droite dans LL sont irréversibles)

- les connecteurs négatifs : $\wp$ et $\&$
(dont les règles d'introduction droite sont réversibles)

Une formule est dite positive lorsque son connecteur principal est positif, négative lorsque son connecteur principal est négatif.

$\rightarrow$ la propriété de focalisation (découverte par J.-M. Andréoli).

Deux preuves qui diffèrent uniquement par l'ordre dans lequel sont effectuées des règles de même polarité sont équivalentes (pour la recherche de preuves, pour l'élimination des coupures).

Exemple: Considérons les formules (équivalentes) suivantes :

$$(A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \quad \text{et} \quad (A \oplus B) \otimes C$$

et les formules duales :

$$(A^\perp \wp C^\perp) \& (B^\perp \wp C^\perp) \quad \text{et} \quad (A^\perp \& B^\perp) \wp C^\perp$$

Et considérons les interactions entre les (para)-preuves possibles de ces formules dans les deux formulations possibles :

1. règle multiplicative suivie de règle additive
2. règle additive suivie de règle multiplicative

A partir des preuves π_A de A, π_B de B et π_C de C on a deux preuves possibles de $(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$

$$\alpha_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_A}{\vdots}\atop{\vdash A} \quad \dfrac{\pi_C}{\vdots}\atop{\vdash C}}{\vdash A \otimes C}}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \text{ et } \quad \beta_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_B}{\vdots}\atop{\vdash B} \quad \dfrac{\pi_C}{\vdots}\atop{\vdash C}}{\vdash B \otimes C}}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)}$$

On a également deux preuves possibles de $(A \oplus B) \otimes C$:

$$\alpha_2 = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_A \\ \vdots \\ \vdash A\end{array}}{\vdash A \oplus B} \quad \begin{array}{c}\pi_C \\ \vdots \\ \vdash C\end{array}}{\vdash (A \oplus B) \otimes C} \text{ et } \quad \beta_2 = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_B \\ \vdots \\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \oplus B} \quad \begin{array}{c}\pi_C \\ \vdots \\ \vdash C\end{array}}{\vdash (A \oplus B) \otimes C}$$

Considérons les intercation de ces preuves avec les preuves suivantes : μ_1 pour la première formulation, μ_2 pour la seconde.

$$\mu_1 = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_{A^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash A^\perp, C^\perp\end{array}}{\vdash A^\perp \wp C^\perp} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{B^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash B^\perp, C^\perp\end{array}}{\vdash B^\perp \wp C^\perp}}{\vdash (A^\perp \wp C^\perp) \& (B^\perp \wp C^\perp)} \qquad \mu_2 = \dfrac{\dfrac{\vdash A^\perp, C^\perp \quad \vdash B^\perp, C^\perp}{\vdash (A^\perp \& B^\perp), C^\perp}}{\vdash (A^\perp \& B^\perp) \wp C^\perp}$$

Quelle que soit la formulation 1 ou 2 choisie, la coupure entre α_1 et μ_1 ou entre α_2 et μ_2 se réduit en la configuration suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_A\\ \vdots\\ \vdash A\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_{A^\perp, C^\perp}\\ \vdots\\ \vdash A^\perp, C^\perp\end{array}}{\vdash C^\perp} \qquad \begin{array}{c}\pi_C\\ \vdots\\ \vdash C\end{array}}{\vdash} \qquad\qquad cut(\alpha_1, \mu_1) = cut(\alpha_2, \mu_2)$$

celle entre β_1 et μ_1 ou entre β_2 et μ_2 se réduit en la configuration suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_B\\ \vdots\\ \vdash B\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_{B^\perp, C^\perp}\\ \vdots\\ \vdash B^\perp, C^\perp\end{array}}{\vdash C^\perp} \qquad \begin{array}{c}\pi_C\\ \vdots\\ \vdash C\end{array}}{\vdash} \qquad\qquad cut(\beta_1, \mu_1) = cut(\beta_2, \mu_2)$$

Finalement, on ne retient que les informations suivantes :

Formulation 1

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{A^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash A^\perp, C^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{B^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash B^\perp, C^\perp\end{matrix}}{\vdash (A^\perp \wp C^\perp) \& (B^\perp C^\perp)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_{A}\\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{C}\\ \vdots \\ \vdash C\end{matrix}}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)}}{\vdash}$$

Formulation 2

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{A^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash A^\perp, C^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{B^\perp,C^\perp}\\ \vdots \\ \vdash B^\perp, C^\perp\end{matrix}}{\vdash (A^\perp \& B^\perp) C^\perp} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_{A}\\ \vdots \\ \vdash A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{C}\\ \vdots \\ \vdash C\end{matrix}}{\vdash (A \oplus B) \otimes C}}{\vdash}$$

qui se réduit en : $$\begin{array}{ccc} \pi_A & \pi_{A^\perp, C^\perp} & \pi_C \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdash A & \vdash A^\perp, C^\perp & \vdash C \end{array}$$

$\rightarrow$ on ne garde que deux règles pour la construction/déconstruction : une positive et une négative.

$\rightarrow$ on peut manipuler des séquents de la forme $\Pi \vdash \Gamma$ où Π contient au plus une formule positive et Γ contient des formules positives.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix} \pi_{A^{\perp},C^{\perp}} \\ \vdots \\ \vdash A^{\perp}, C^{\perp} \end{matrix}
\quad
\begin{matrix} \pi_{B^{\perp},C^{\perp}} \\ \vdots \\ \vdash B^{\perp}, C^{\perp} \end{matrix}
}{\vdash (A^{\perp} \parr C^{\perp}) \& (B^{\perp} C^{\perp}) \text{ ou } (A^{\perp} \& B^{\perp}) \parr C^{\perp}}
\qquad
\dfrac{
\begin{matrix} \pi_{A} \\ \vdots \\ \vdash A \end{matrix}
\quad
\begin{matrix} \pi_{C} \\ \vdots \\ \vdash C \end{matrix}
}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \text{ ou } (A \otimes B) \oplus C}
}{\vdash}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix} \pi_{\xi.1^{\perp},\xi.2^{\perp}} \\ \vdots \\ \vdash \xi.1^{\perp}, \xi.2^{\perp} \end{matrix}
\quad
\begin{matrix} \pi_{\xi.3^{\perp},\xi.2^{\perp}} \\ \vdots \\ \vdash \xi.3^{\perp}, \xi.2^{\perp} \end{matrix}
}{\vdash \xi^{\perp}}
\qquad
\dfrac{
\begin{matrix} \pi_{\xi_1} \\ \vdots \\ \vdash \xi.1 \end{matrix}
\quad
\begin{matrix} \pi_{\xi.2} \\ \vdots \\ \vdash \xi.2 \end{matrix}
}{\vdash \xi}
}{\vdash}
$$

Point sur les ingrédients des ”prédémonstrations”.

- Le *daimon*;
- La focalisation et l'alternance des polarités;
- La localisation;
- Le nouveau statut de la règle de coupure.

Exemple Une personne X souhaite savoir si une personne Y dont elle a entendu dire qu'elle souhaite vendre des biens immobiliers, va vendre un bien noté 1. X sait Y possède trois biens 1, 2 et 3.

X désire savoir : est-ce que Y va vendre 1 et si oui à quel prix.

Nous proposons une formalisation (sous forme de suite de coups P/O ou $+/-$) du projet de conversation construit par X $(P/+)$ qui envisage un échange avec Y $(O/-)$ à partir de la question $0 =$ *J'ai entendu dire que tu avais l'intention de vendre des biens immobiliers, lesquels ?* :

X entame donc une conversation (interaction) située en $<>$, avec Y en posant une question 0 ; cette action est codée $(+, <>, \{0\})$.

X imagine plusieurs réponses possibles de Y

Y peut répondre *Je vais vendre* 1 ou bien*Je vais vendre* 1 *et* 3 ; action que l'on peut formaliser en $(-, 0, J)$. Où on peut avoir pour J n'importe quelle partie non vide de $\{1, 2, 3\}$.

Dans toutes les situations qui font apparaître que 1 n'est pas à vendre, X prévoit de clôre la discussion (*Ah très bien, je te souhaite bonne chance.*), c'est à dire de faire suivre un $(-, 0, J)$ par $\dagger$. X envisage donc les dialogues suivants :

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{2, 3\}).\dagger$;

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{2\}).\dagger$;

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{3\}).\dagger$;

Dans le cas où il apparaît que 1 est à vendre X prévoit de poursuivre la discussion en demandant le prix du bien 1.

X envisage donc les dialogues suivants :

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 2, 3\}).(+, 01, \{0\})$;

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 2\}).(+, 01, \{0\})$;

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}).(+, 01, \{0\})$;

- $(+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1\}).(+, 01, \{0\})$;

Enfin dans ce dernier cas, X s'attend à ce que Y lui annonce un prix puis prévoir de clôre la discussion pour se donner un temps de réflexion.

X envisage donc les dialogues suivants :

- $c_{1,i} = (+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 2, 3\}).(+, 01, \{0\}).(-, 010, \{i\}).\dagger$;
- $c_{2,i} = (+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 2\}).(+, 01, \{0\}).(-, 010, \{i\}).\dagger$;
- $c_{3,i} = (+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}).(+, 01, \{0\}).(-, 010, \{i\}).\dagger$;
- $c_{4,i} = (+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1\}).(+, 01, \{0\}).(-, 010, \{i\}).\dagger$

Nous résumons sous forme de *dessin*, le projet de conversation construit par X :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i, 02}\dagger}{010 \vdash 02}}{\vdash 01, 02} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i}\dagger}{010 \vdash}}{\vdash 01} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i, 03}\dagger}{010 \vdash 03}}{\vdash 01, 03} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i, 02, 03}\dagger}{010 \vdash 02, 03}}{\vdash 01, 02, 03} \quad \dfrac{}{\vdash 03}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 02}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 03, 02}\dagger}{\dfrac{0 \vdash}{\vdash <>}}$$

Les objets de la ludique

Lieu= la place de l'occurrence d'une formule dans une parapreuve, l'adresse d'une sous-formule .

On va manipuler des lieux i.e. des suites finies d'entiers : les **biais** (adresses relatives de sous-formules).
Notation : $\xi = 135$

Interaction = coïncidence de deux lieux en position duale dans deux dessins différents.

Design-Dessin :

Dans une fourche $\Theta \vdash \Lambda$, Θ est un ensemble (appelé le "manche" de la fourche) contenant au plus un lieu ; Λ un ensemble de lieux (la "poignée").

Un **Design** *(Dessin) est un arbre de fourches* $\Gamma \vdash \Delta$ *dont la racine est appelée* **base**, *dont les feuilles sont des fourches négatives ou le daimon et est construit en utilisant les trois règles suivantes :*

Daimon

$$\frac{}{\vdash \Delta}\,\dagger$$

Positive rule :

$$\frac{\cdots \qquad \xi.i \vdash \Delta_i \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \xi.j \vdash \Delta_j \cdots}{\vdash \Delta, \xi}\,(\xi, I)$$

où I est un ensemble fini d'entiers (une ramification) et $\forall i \in I$, les Δ_i sont deux à deux disjoints et inclus dans Δ

Negative rule :

$$\frac{\cdots \qquad \vdash \xi.I, \Delta_I \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \vdash \xi.J, \Delta_J}{\xi \vdash \Delta}\,(\xi, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}$ est un ensemble de ramifications éventuellement vide ou infini et $\forall I \in \mathcal{N}$, les Δ_I sont inclus dans Δ

Exemple 1

$$\dfrac{\dfrac{}{\xi3 \vdash \tau}\,\emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi21, \xi22, \sigma}\,\dagger \qquad \dfrac{\dfrac{}{\sigma1 \vdash \xi27}\,\emptyset \qquad \dfrac{}{\sigma2 \vdash \xi23}\,\emptyset}{\vdash \xi23, \xi27, \sigma}\,(\sigma,\{1,2\})}{\xi2 \vdash \sigma}\,(\xi2,\{1,2,\},\{3,7,\})}{\vdash \xi, \sigma, \tau}\,(\xi,\{3,2\})$$

Exemple 2 : où $\mathcal{N} = \{\{i\}; i \in \mathbb{N}^+\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0111, 03}\,\dagger \qquad \dfrac{}{\vdash 0112, 03}\,\dagger \qquad \cdots}{011 \vdash 03}\,(011,\mathcal{N})}{\vdash 01, 03}\,(01,\{1\})}{0 \vdash}\,(0,\{1,3\})}{<>}\,(\{0\})$$

Exemple 3 :

La η-preuve de $(A \otimes B) \multimap (A \otimes B)$ (où A et B sont négatifs) avec :
$(A \otimes B) \multimap (A \otimes B) \equiv (A^\perp \wp B^\perp \wp (A \otimes B) \equiv [A \otimes B \otimes (A \otimes B)^\perp]^\perp$:

$$\dfrac{\dfrac{A^\perp \vdash A^\perp \qquad B^\perp \vdash B^\perp}{\vdash A^\perp, B^\perp, A \otimes B}}{A \otimes B \otimes (A \otimes B)^\perp \vdash}$$

sera représenté par le dessin suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{Fax}}{\xi 31 \vdash \xi 1} \qquad \dfrac{\mathfrak{Fax}}{\xi 32 \vdash \xi 2}}{\vdash \xi 1, \xi 2, \xi 3}}{\xi \vdash}$$

Exemple 4 : Le $\mathfrak{Fax}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{Fax}_{\xi' i_1, \xi i_1}}{\xi' i_1 \vdash \xi i_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\mathfrak{Fax}_{\xi' i_l, \xi i_l}}{\xi' i_l \vdash \xi i_l}}{\vdash \xi.I, \xi'}(\xi', I) \qquad \cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{Fax}_{\xi' j_1, \xi j_1}}{\xi' j_1 \vdash \xi j_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\mathfrak{Fax}_{\xi' j_l, \xi j_l}}{\xi' j_l \vdash \xi j_l}}{\vdash \xi.J, \xi'}(\xi', J) \qquad \cdots}{\xi \vdash \xi'}(\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Chroniques

Point de vue informel :

Une **chronique** est une suite de coups alternés (donc en quelque sorte une partie), où les coups, ici appelés actions, seraient par exemple pour le dialogue immobilier :

`Exemples d'actions :`

$(+,<>,\{0\})$ ou $(-,0,\{1\})$ ou $(-,0,\{1,2\})$ ou $(-,0,\{1,2,3\})\ldots$.

`Exemples de chronique :`

$(+,<>,\{0\}).(-,0,\{1,2\}).(+,01,\{0\}).(-,010,\{i\}).\dagger$

Exemple 1

$$\dfrac{\xi3 \vdash \tau \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi21, \xi22, \sigma}\,\dagger \qquad \dfrac{\sigma1 \vdash \xi27 \qquad \sigma2 \vdash \xi23}{\vdash \xi23, \xi27, \sigma}\,{\scriptstyle (\xi23,\{1,2\})}}{\xi2 \vdash \sigma}\,{\scriptstyle (\xi2,\{1,2,\},\{3,7,\})}}{\vdash \xi, \sigma, \tau}\,{\scriptstyle (\xi,\{3,2\})}$$

A chaque embranchement positif, on considère l'action (ξ, I)*,*
à chaque embranchement négatif, on choisit un (ξ, I)

<u>Chroniques possibles</u> :

$(+, \xi, \{3, 2\}).(-, \xi3, \emptyset)$

$(+, \xi, \{3, 2\}).(-, \xi2, \{1, 2, \})$

$(+, \xi, \{3, 2\}).(-, \xi2, \{1, 2, \})\dagger$

$(+, \xi, \{3, 2\}).(-, \xi2, \{3, 7\})$

$(+, \xi, \{3, 2\}).(-, \xi2, \{3, 7\}).(+, \xi23, \{1, 2\}).(-, \sigma2, \emptyset)$

Exemple 2 : où $\mathcal{N} = \{\{i\}; i \in \mathbb{N}^+\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0111, 03}\,\dagger \qquad \dfrac{}{\vdash 0112, 03}\,\dagger \qquad \cdots}{011 \vdash 03}\,(011,\{\{i\};i\in\mathbb{N}^+\})}{\vdash 01, 03}\,(01,\{1\})}{0 \vdash}\,(0,\{\{1,3\}\})}{\vdash <>}\,(\{(<>,0)\})$$

Chroniques maximales :

$((+,<>,\{0\}).(-,0,\{1,3\}).(+,01,\{1\}).(-,011,\{17\}).\dagger$

`Remarques` :

- lors d'un coup négatif, on retient un des coups possibles (prévus)de O dans le dessein

- lors d'un coup positif, on donne l'unique coup de P

Deux chroniques sont **cohérentes** lorsqu'on peut les réunir pour faire un dessein de P

`Exemple` :

$$((+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}.(+, 01, \{1\}).(-, 011, \{3\}).\dagger$$
$$((+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}.(+, 01, \{0\})$$

sont incohérentes

$$((+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}.(+, 01, \{1\}).(-, 011, \{3\}).\dagger$$
$$((+, <>, \{0\}).(-, 0, \{1, 3\}.(+, 01, \{1\}).(-, 011, \{0\}).\dagger$$

sont cohérentes

Définitions :

• *Une* **chronique** *est une suite non vide d'actions* $k_0, \ldots, k_n$ *où les actions* $k_i = (\epsilon, \xi_i, I_i)$ *sont de polarités alternées, telle que :*

- seule la dernière action k_n *peut être le daimon* $= (+, \dagger)$ *;*

- une action négative a comme foyer ξ_i *soit l'élément de* Γ *soit un élément de* $\xi_{i-1}.I_{i-1}$*;*

- une action positive a comme foyer ξ_i *soit un élément de* Δ *, soit un élément de* $\xi_q.I_q$ $(q < i)$*;*

- les foyers sont deux à deux distincts.

• *Deux chroniques sont* **cohérentes** *si elles ne diffèrent qu'à partir d'une action négative et à partir de ce moment là elles n'ont plus jamais les mêmes foyers.*

Design-dessein

Un **dessein (de base** $\Gamma \vdash \Delta$*) est un ensemble* $\mathfrak{D}$ *de chroniques tel que :*

- $\mathfrak{D}$ *est clos par restriction ;*

- les chroniques de $\mathfrak{D}$ *sont deux à deux cohérentes ;*

- La dernière action d'une chronique maximale est positive.

Dessin vs Dessein

Il n'y a pas toujours qu'un seul dessin construit à partir d'un dessein donné. (On ne sait pas où placer les lieux sur lesquels on ne focalise pas après qu'ils aient été créés.)

Quelques dess(e)ins particuliers

$\mathfrak{Daimon}$ $\qquad \mho^+ = \dfrac{}{\vdash \Lambda}\,\dagger \qquad\qquad \mho^- = \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi.I, \Lambda}\,\dagger}{\xi \vdash \Lambda}\,{\scriptstyle \xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N})}$

$\mathfrak{Skunk}$ $\qquad \mathfrak{S}^-_\xi = \dfrac{}{\xi \vdash \Lambda} \qquad\qquad \mathfrak{S}^+_{(\lambda,I)} = \dfrac{\dfrac{\mathfrak{S}^-_{\lambda.i}}{\lambda.i \vdash} \qquad \dots}{\vdash \Lambda}\,{\scriptstyle (\lambda,I)}$

$\mathfrak{One}$ $\qquad \dfrac{}{\vdash \xi}\,{\scriptstyle (\xi,\emptyset)}$

$\mathfrak{Boots}$ $\qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,\dagger}{\xi \vdash}\,{\scriptstyle (\xi,\{\emptyset)\}}$

La normalisation

La **coupure** n'est plus interne, c'est la coïncidence de deux lieux en position duale dans les bases de deux desseins.

Définition d'un réseau (cut-net) *C'est un ensemble fini non vide* $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{D}_0, \cdots, \mathfrak{D}_n\}$ *de desseins de base* $\Theta_p \vdash \Lambda_p$ *tels que :*

- les lieux distincts sont 2 à 2 disjoints ;

- chaque lieu apparait au plus 2 fois : une fois en position positive, l'autre négative, que l'on relie par un lien coupure ;

- le graphe des bases et des liens-coupures est connexe et acyclique.

La base constituée des lieux non coupés est la base du réseau.

Le dessein principal d'un réseau est soit celui qui est positif soit le négatif dont la poignée est non coupée.

`Exemple :` $\mathfrak{R}$ est constitué de 4 desseins de bases : $\vdash \xi, \boxed{\tau}$
$\xi \vdash \alpha, \beta \qquad \alpha \vdash \qquad \beta \vdash$ est un réseau de base $\vdash \tau$ dont le dessein principal est $\vdash \xi, \tau$

Réseau clos : C'est un réseau dont la base est vide ($\vdash$)

`Exemple :`

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \vdots\end{array}}{\vdash \xi}\,\kappa \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{E}\\ \vdots\end{array}}{\xi \vdash \alpha, \beta}\,\mathcal{N} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{F}\\ \vdots\end{array}}{\alpha \vdash}\,\mathcal{M} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{G}\\ \vdots\end{array}}{\beta \vdash}\,\mathcal{L}$$

Normalisation dans le cas clos :

On construit la forme normale $[[\mathfrak{R}]]$ du réseau par induction sur la première règle (κ) du dessein principal :

- si $\kappa = \dagger$ alors la <u>normalisation termine</u> $[[\mathfrak{R}]] = \mathfrak{Dai}$

- si $\kappa = (\xi, I)$ et si $I \notin \mathcal{N}$ où $(\xi, \mathcal{N})$ est la règle du dessein adjoint alors la <u>normalisation échoue</u>.

- si $\kappa = (\xi, I)$ et $I \in \mathcal{N}$. Soit $\mathfrak{D}_i$ le sous-dessein de $\mathfrak{D}$ de base $\xi.i \vdash$ et $\mathfrak{E'}_I$ le sous-dessein de $\mathfrak{E}$ de base $\vdash \xi.I$.

On définit $\mathfrak{S}$ en remplaçant $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ par $(\mathfrak{D}_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{E'}_I$. Notons $\mathfrak{S}'$ sa composante connexe.

$$[[\mathfrak{R}]] = [[\mathfrak{S}']]$$

Exemple (suite):

$\mathfrak{S} =$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \vdots\end{array}}{\vdash \xi}\,\kappa \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{E}\\ \vdots\end{array}}{\xi \vdash \alpha, \beta}\,\mathcal{N} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{F}\\ \vdots\end{array}}{\alpha \vdash}\,\mathcal{M} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{G}\\ \vdots\end{array}}{\beta \vdash}\,\mathcal{L}$$

$\Downarrow$

$\mathfrak{S}' =$

$$\begin{array}{c}\mathfrak{D}_{i_1}\\ \vdots\\ \xi i_1 \vdash\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\mathfrak{D}_{i_n}\\ \vdots\\ \xi i_n \vdash \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{E}'_I\\ \vdots\\ \vdash \xi i_1, \dots, \xi i_n\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{F}\\ \vdots\end{array}}{\alpha \vdash}\,\mathcal{M}$$

Définition de l'orthogonalité:

- Deux desseins $\mathfrak{D}$ *et* $\mathfrak{E}$ *de bases opposées* ($\xi \vdash$ *et* $\vdash \xi$) *sont* **orthogonaux** *lorsqu'ils forment un réseau convergent*

- Soit $\mathfrak{D}$ *un dessein de base* $\xi \vdash \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. *Notons* $\mathfrak{E}_0$ *un dessein de base* $\vdash \xi$ *et* $\mathfrak{E}_p$ *pour* $1 \leq p \leq n$ *des desseins de base* $\sigma_p \vdash$.

La famille $(\mathfrak{E}_p)_{0 \leq p \leq n}$ *est* **orthogonale** *à* $\mathfrak{D}$, *lorsque la normalisation du réseau* $[[\mathfrak{D}, (\mathfrak{E}_p)]]$ *converge.*

`Notation :` $\mathfrak{D} \perp (\mathfrak{E}_p)$.

Exemple 1-1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}_1 & \qquad & \mathfrak{D}_2 \\[1em] \dfrac{\dfrac{\vdots}{\xi 4 \vdash} \qquad \dfrac{\vdots}{\xi 9 \vdash}}{\vdash \xi}\,\{4,9\} & \qquad & \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \xi 1, \xi 7} \qquad \dfrac{}{\vdash \xi 4, \xi 9}\,\dagger}{\xi \vdash}\,\{\{1,7\},\{4,9\}\} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\vdots}{\xi 4 \vdash} \qquad \dfrac{\vdots}{\xi 9 \vdash} \qquad\qquad \dfrac{}{\vdash \xi 4, \xi 9}\,\dagger$$

$$\Downarrow$$

$$\mathfrak{Dai}$$

$\mathfrak{D}_1$ `et` $\mathfrak{D}_2$ `sont orthogonaux`

Exemple 1-2 :

$$\mathfrak{D}_3 \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{D}_4$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\xi 4 \vdash}\ (\{\{3\}\{1,4\}\}) \qquad \dfrac{\vdots}{\xi 9 \vdash}}{\vdash \xi}\ \{4,9\} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \xi 1, \xi 7} \qquad \dfrac{\vdots}{\vdash \xi 4, \xi 9}\ (\xi 4,\{1,2\})}{\xi \vdash}\ \{\{1,7\},\{4,9\}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\vdots}{\xi 4 \vdash}\ (\{\{3\}\{1,4\}\}) \qquad \dfrac{\vdots}{\xi 9 \vdash} \qquad\qquad \dfrac{\vdots}{\vdash \xi 4, \xi 9}\ (\xi 4,\{1,2\})$$

$$\Downarrow$$

Divergence

$\mathfrak{D}_3$ `et` $\mathfrak{D}_4$ `ne sont pas orthogonaux`

Exemple 2 : Reprenons l'exemple du projet de conversation en vue d'une achat immobilier ($\mathfrak{D}_x$)

$$
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 011i,02}\dagger}{011\vdash 02}}{\vdash 01,02}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 011i}\dagger}{011\vdash}}{\vdash 01}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 011i,03}\dagger}{011\vdash 03}}{\vdash 01,03}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 011i,02,03}\dagger}{011\vdash 02,03}}{\vdash 01,02,03}
\quad
\dfrac{}{\vdash 02}\dagger
\quad
\dfrac{}{\vdash 03}\dagger
\quad
\dfrac{}{\vdash 03,02}\dagger
}{0\vdash}}{\vdash <>}
$$

$\mathfrak{D}_X$ est orthogonal aux desseins suivants :

$$
\begin{array}{c}\mathfrak{E}_5\\ \dfrac{\dfrac{02\vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{c}\mathfrak{E}_6\\ \dfrac{\dfrac{03\vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{c}\mathfrak{E}_7\\ \dfrac{\dfrac{02\vdash \qquad 03\vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{c}\mathfrak{E}_0\\ \dfrac{\dfrac{\qquad}{\vdash 0}\dagger}{<>\vdash}\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{c}\mathfrak{E}_1\\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{011i\vdash}{\vdash 011}}{01\vdash} \qquad 02\vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}\end{array}
$$

Exemple 2 (suite): Normalisation du dessein $\mathfrak{D}_X$ contre $\mathfrak{E}_1$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i, 02}\,\dagger}{011 \vdash 02}\,(011,\{i\})}{\vdash 01, 02}\,(01,\{1\}) \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 01\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 01, 03\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 01, 02, 03\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 02\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 03\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \vdash 03, 02\end{matrix}}{0 \vdash}\,(0,\mathcal{N})}{\vdash <>}\,(<>,\{0\})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{011i \vdash}{\vdash 011}\,(011,\{i\})}{01 \vdash}\,(01,\{\{1\}\}) \qquad 02 \vdash}{\vdash 0}\,(0,\{1,2\})}{<>\vdash}$$

Une dispute est : une chronique qui retrace l'historique d'une normalisation.

`Exemple :` $(+, <>, \{\mathbf{0}\})(-, \mathbf{0}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})(+, \mathbf{01}, \{\mathbf{1}\})(-, \mathbf{011}, \{\mathbf{i}\})\dagger$

Exemple 3 :

$$
\begin{array}{cccc}
\mathfrak{D} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \\[1em]
\dfrac{\vdots}{\boxed{\vdash \xi}}\ \scriptstyle\{1,2\}) &
\dfrac{\vdots}{\xi \vdash \alpha, \beta}\ \scriptstyle\{\{1,2\},J\} &
\dfrac{\vdots}{\alpha \vdash}\ \scriptstyle\{\{1\},\{2\}\} &
\dfrac{\vdots}{\beta \vdash}\ \mathcal{L}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\dfrac{\vdots}{\xi 1 \vdash} \quad
\dfrac{\vdots}{\xi 2 \vdash \tau} \quad
\dfrac{\vdots \quad {\scriptstyle (\alpha,\{1\})}}{\boxed{\vdash \xi 1, \xi 2, \alpha}} \quad
\dfrac{\vdots}{\not\vdash \cancel{\xi}.\ \cancel{J}} \quad
\dfrac{\vdots}{\alpha \vdash}\ \scriptstyle\{\{1\},\{2\}\} \quad
\dfrac{\vdots}{\cancel{\beta} \not\vdash}\ \mathcal{L}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\dfrac{\vdots}{\xi 1 \vdash} \quad
\dfrac{\vdots}{\xi 2 \vdash \tau} \quad
\dfrac{\vdots \quad {\scriptstyle \{\{3,5\}\}}}{\alpha 1 \vdash \xi 1, \xi 2} \qquad
\dfrac{\vdots \quad {\scriptstyle I=(3,5)}}{\boxed{\vdash \alpha 1}} \quad
\dfrac{\vdots}{\not\vdash \cancel{\alpha}\ \cancel{2}}
$$

$$
\dfrac{\vdots}{\xi 1 \vdash} \quad \dfrac{\vdots}{\xi 2 \vdash \tau} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha 1 \vdash \xi 1, \xi 2}\,\{\{3,5\}\} \qquad \dfrac{\vdots}{\boxed{\vdash \alpha 1}}\,I=(3,5) \quad \dfrac{\vdots}{\cancel{\nvdash \alpha 2}}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\dfrac{\vdots}{\xi 1 \vdash}\,(\{4\}) \quad \dfrac{\vdots}{\cancel{\xi 2 \nvdash \tau}} \quad \dfrac{\vdots}{\boxed{\vdash \alpha 13, \alpha 15, \xi 1}}\,(\xi 1,4) \quad \dfrac{\vdots}{\alpha 13 \vdash} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha 15 \vdash}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\dfrac{}{\boxed{\vdash \xi 14}}\,\dagger \quad \dfrac{\vdots}{\xi 14 \vdash \alpha 13, \alpha 15} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha 13 \vdash} \quad \dfrac{\vdots}{\alpha 15 \vdash}
$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{Dai}}$$

Exemple 4 :

Soit $\mathfrak{R}$ un objet dessiné, vu comme un enregistrement composé de trois champs : les coordonnées de son centre, sa forme (carré, cercle, ...) , sa couleur (rouge, vert, bleu, ...).

$\mathfrak{R}$ est représenté par un dessein de base $\xi\vdash$.

$\mathfrak{R} =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 131}\,\emptyset}{\xi 13 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 141}\,\emptyset}{\xi 14 \vdash}}{\vdash \xi 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 281}\,\emptyset}{\xi 28 \vdash}}{\vdash \xi 2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 351}\,\emptyset}{\xi 35 \vdash}}{\vdash \xi 3}}{\xi \vdash}$$

$\mathfrak{Q}$ est un dessein qui représente le fait d'interroger $\mathfrak{R}$ sur sa couleur et d'enregistrer la réponse.

$$\mathfrak{Q} =$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma 31}\,\dagger}{\sigma 3 \vdash}\,(\sigma 3,\{1\})}{\vdash \xi 31, \sigma}\,(\sigma,\{3\}) \qquad \cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma 37}\,\dagger}{\sigma 3 \vdash}\,(\sigma 3,\{7\})}{\vdash \xi 37, \sigma}\,(\sigma,\{3\})}{\xi 3 \vdash \sigma}\,(\xi 3,\{\{1\},\cdots,\{7\}\})}{\vdash \xi, \sigma}\,(\xi,\{3\})$$

Ce qui donne comme résultat de la normalisation le dessein suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \sigma 3.5}\,\dagger}{\sigma 3 \vdash}\,(\sigma 3, \{5\})}{\vdash \sigma}\,(\sigma, \{3\})$$

Les comportements

On peut penser les desseins comme des preuves, des stratégies, des λ-termes, des fonctions, des cliques.

Les comportements vont permettre de retrouver les notions de formules, types (du coté de la syntaxe) et arènes, domaines de Scott, espaces cohérents (du coté de la sémantique).

$\mathcal{D} \in \mathbb{G}$ pourra être lu comme : "*$\mathcal{D}$ est une preuve de* $\mathbb{G}$", "*$\mathcal{D}$ est une stratégie de* $\mathbb{G}$" "*$\mathcal{D}$ est un terme de type* $\mathbb{G}$", "*$\mathcal{D}$ est un modèle de* $\mathbb{G}$", ...

On utilise la relation $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$ qui est définie par $\mathcal{D}^{\perp} \subset \mathcal{D}'^{\perp}$

ou de façon équivalente par $\mathcal{D}$ est plus défini que $\mathcal{D}'$:

- il y a éventuellement dans $\mathcal{D}'$ des chroniques commençant comme dans $\mathcal{D}$ mais se terminant plus tôt par un *daimon*

- ou des chroniques en plus à partir d'actions négatives (inclusion).

Cette relation $\preceq$ est un ordre partiel (théorème de séparation).

On a alors en ludique tous les résultats habituels syntaxiques (séparation et associativité) et sémantiques (stabilité et monotonie) mais sur un seul objet : le dessein.

- la *séparation* : Si 2 desseins sont différents, on peut trouver un dessein qui est orthogonal à l'un mais pas à l'autre.

i.e. : un dessein est complètement défini par ses orthogonaux.

- l'*associativité* : $[[[[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]], \mathcal{D}_3]] = [[\mathcal{D}_1, [[\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3]]]]$.

- la *stabilité* : $[[\mathcal{D}_1, (\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3)]] = [[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)]] \cap [[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)]]$

- la *monotonie* : la normalisation est croissante relativement à l'ordre partiel $\preceq$.

Définition : *Un* **comportement** $\mathbb{G}$ *est un ensemble de desseins de même base, (la base du comportement) clos par bi-orthogonal.*

`Propriétés, exemples :`

- Un comportement est clos par sur-dessein (pour la relation $\preceq$).
- Si E est un ensemble de desseins de même base alors $E^{\perp}$ est un comportement.
- $\mathcal{D}^{\perp\perp}$ est le comportement engendré par le dessein $\mathcal{D}$.

Exemples (suite)

1. Le comportement induit par le dessein correspondant au projet dialogue de l'interlocuteur X : $\mathbf{C}_X$ se calcule en prenant le bi-orthogonal du singleton $\{\mathcal{D}_X\}^{\perp\perp}$. Il contient tous les sur-desseins de $\mathcal{D}_X$ en particulier le *Daimon* de base $\vdash <>$. Il contient aussi un dessein comme

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i, 02}\dagger}{010 \vdash 02}}{\vdash 01, 02} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 010i}\dagger}{010 \vdash}}{\vdash 01} \quad \dfrac{}{\vdash 01, 03}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 01, 02, 03}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 03}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 02}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 03, 02}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 01, 04}\dagger}{0 \vdash}}{\vdash <>}$$

2. Si on considère le dessein suivant : $\mathcal{O}ne = \dfrac{}{\vdash \xi}{\scriptstyle(\xi,\emptyset)}$

on peut définir le comportement $1 = \{\mathcal{O}ne\}^{\perp\perp} = \{ \dfrac{}{\vdash \xi}{\scriptstyle(\xi,\emptyset)}, \dfrac{}{\vdash \xi}{\scriptstyle\dagger} \}$.

Le comportement $\perp = 1^{\perp}$ contient $\dfrac{\dfrac{}{\vdash}{\scriptstyle\dagger}}{\xi \vdash}$ et tous ses sur-desseins.

3. Le comportement négatif T contenant le dessein suivant :

$$\frac{}{\xi \vdash}\,(\xi,\emptyset) \qquad = \emptyset$$

est tel que $T^{\perp}$ contient l'unique dessein $Dai_{\vdash\xi}$.

$T = \{Dai\}^{\perp}$ contient tous les desseins négatifs de base $\xi \vdash$.

L'incarnation

*L'***incarnation** *d'un dessein (relativement à un comportement) est la plus petite partie du dessein nécessaire pour assurer son appartenance à ce comportement.*

Soit $\mathcal{D} \in \mathbf{G}$:

On note $|\mathcal{D}|$ l'incarnation du comportement $\mathcal{D}$

$|\mathcal{D}|$ est la part de $\mathcal{D}$ qui est reconnue interactivement par les desseins de $\mathbf{G}^{\perp}$. $\mathcal{D}$ est **matériel** lorsqu'il est égal à son incarnation.

L'**incarnation d'un comportement** est l'ensemble des incarnations des desseins qu'il contient ou autrement dit l'ensemble de ses desseins matériels. On note $|\mathbf{G}|$ l'incarnation du comportement $\mathbf{G}$

Exemples :

$$|\mathbf{1}| = \{ \quad \frac{}{\vdash \xi}(\xi,\emptyset) \quad \} \; ; \; |\mathbf{1}^{\perp}| = |\perp| = \{ \quad \cfrac{\overline{\vdash}\,\dagger}{\xi \vdash} \quad \} \; ;$$

$|\mathbf{T}| = \{ \quad \frac{}{\xi \vdash}(\xi,\emptyset) \quad \}$ c'est à dire $|\mathbf{T}|$ contient seulement le dessein vide de base $\xi \vdash$.

Le lien avec la logique traditionnelle

Les connecteurs additifs

• La disjonction (entre positifs de même base)

- un connecteur locatif total : $\mathbf{G} \uplus \mathbf{H} = (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\perp\perp}$.

- un connecteur spirituel partiel $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{G} \uplus \mathbf{H}$ lorsque $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont disjoints.

Disjoints signifie pour des positifs que les ensembles des ramifications (premières actions) de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont disjoints.

Le connecteur locatif $\uplus$ n'est pas complet : il peut y avoir dans $\mathbf{G} \uplus \mathbf{H}$ des desseins qui ne sont ni dans $\mathbf{G}$ ni dans $\mathbf{H}$.

Exemple : Considérons

$$\mathcal{D} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi 100 \vdash}{\vdash \xi 10}}{\xi 1 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 20}\dagger}{\xi 2 \vdash}}{\vdash \xi} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 10}\dagger}{\xi 1 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\xi 200 \vdash}{\vdash \xi 20}}{\xi 2 \vdash}}{\vdash \xi}$$

et les comportements $\mathbf{G} = \{\mathcal{D}\}^{\perp\perp}$ et $\mathbf{H} = \{\mathcal{E}\}^{\perp\perp}$

Le comportement $\mathbf{G}^{\perp} \cap \mathbf{H}^{\perp}$ est engendré par les dessins suivants :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi 100, \xi 2}\dagger}{\xi 10 \vdash \xi 2}}{\vdash \xi 1, \xi 2}}{\xi \vdash} \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \xi, \xi 200}\dagger}{\xi 20 \vdash \xi 1}}{\vdash \xi 1, \xi 2}}{\xi \vdash}$$

Le dessein suivant est dans $\mathbf{G} \uplus \mathbf{H}$, mais n'est ni dans $\mathbf{G}$, ni dans $\mathbf{H}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi 100 \vdash}{\vdash \xi 10}}{\xi 1 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\xi 200 \vdash}{\vdash \xi 20}}{\xi 2 \vdash}}{\vdash \xi} \quad \text{(en effet } \mathbf{G}^{\perp} \text{ contient par exemple } \dfrac{\dfrac{\xi 20 \vdash \xi 1}{\vdash \xi 2, \xi 1}}{\xi \vdash}\text{)}$$

Le connecteur spirituel $\oplus$ est complet : $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$

Il peut être rendu total :

- sur tous les comportements positifs à l'aide des **délocalisations**,

- sur tous les comportements à l'aide du **shift**.

Délocaliser permet de travailler avec des copies :

Une délocalisation θ *d'un lieu* ξ *vers le lieu* ξ' *est une fonction partielle injective* θ *des sous-lieux de* ξ *dans les sous-lieux de* ξ' *telle que* $\theta(\xi) = \xi'$ *et pour tout sous-lieu* σ *de* ξ*, il y a une fonction* θ_σ *des biais sur les biais telle que* $\theta(\sigma.i) = \theta(\sigma).\theta_\sigma(i)$

Shifter (passer son tour) permet de changer de polarité.

Le shift *est une opération qui consiste à remplacer un dessein* $\mathcal{D}$ *de base* $\vdash \xi.i$ *(resp.* $\xi.i \vdash$*) par le dessein de base* $\xi \vdash$ *(resp.* $\vdash \xi$*) obtenu en prenant les chroniques de* $\mathcal{D}$ *précédées de l'action* $(-, \xi, \{i\})$ *(respetivement* $(+, \xi, \{i\})$. On note $\uparrow \mathbf{G}$ (resp. $\downarrow \mathbf{G}$) le comportement obtenu par bi-orthogonalité de l'ensemble des desseins schiftés de $\mathbf{G}$.

- La conjonction additive :

\- un connecteur locatif total : l'intersection $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$. **G** et **H** sont des comportements de même base (donc de même polarité).

\- on peut retrouver le connecteur & à condition que les comportements (négatifs) soient disjoints.

Disjoints signifie encore que les ensembles des ramifications (premières actions) de **G** et **H** sont disjoints.

Exemple (locus solum)

$\mathbf{Coord} = \{\mathcal{D}_c\}^{\perp\perp}$ est la donnée d'un couple de coordonnées $(3, 4)$,

$\mathbf{C} = \{\mathcal{F}_f\}^{\perp\perp}$ est la donnée d'une couleur (5 qui code le bleu) :

$$\mathcal{D}_c \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 131}(131,\emptyset)}{1.3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 141}(141,\emptyset)}{1.4 \vdash}}{\vdash 1}$$

$$\mathcal{F}_f \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 251}(251,\emptyset)}{2.5 \vdash}}{\vdash 2}$$

$\mathbf{Coord} = \uparrow\downarrow 1_{131} \otimes \uparrow\downarrow 1_{141}$ et $\mathbf{C} = \uparrow\downarrow 1_{251}$

On peut alors construire un enregistrement comportant deux champs : coordonnées et couleur (en prenant la & de ces comportements) $\uparrow \mathbf{Coord} \quad \cap \uparrow \mathbf{C} = \uparrow \mathbf{Coord} \quad \& \uparrow \mathbf{C}$.

Ce comportement est engendré par :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 131}{\scriptstyle(131,\emptyset)}}{1.3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 141}{\scriptstyle(141,\emptyset)}}{1.4 \vdash}}{\vdash 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 251}{\scriptstyle(251,\emptyset)}}{2.5 \vdash}}{\vdash 2}}{<>\vdash}$$

Par contre si on prend des comportements associés chacun à la donnée d'un couple de coordonnées et localisés en 1 :

$\mathbf{G_1} = \{\mathcal{D}_1\}^{\perp\perp}$ la donnée d'un couple de coordonnées $(3,4)$,
$\mathbf{G_2} = \{\mathcal{D}_2\}^{\perp\perp}$ la donnée d'un autre couple de coordonnées $(2,4)$

$$\mathcal{D}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 131}{\scriptstyle (131,\emptyset)}}{1.3 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 141}{\scriptstyle (141,\emptyset)}}{1.4 \vdash}}{\vdash 1}}{<>\vdash}$$

$$\mathcal{D}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 121}{\scriptstyle (121,\emptyset)}}{1.2 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 141}{\scriptstyle (141,\emptyset)}}{1.4 \vdash}}{\vdash 1}}{<>\vdash}$$

$$\mathbf{G_1} \cap \mathbf{G_2} = \left\{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 1}\dagger}{<>\vdash}\right\}^{\perp\perp}$$

On a $|\mathbf{G}\&\mathbf{H}| = |\mathbf{G}| \times [\mathbf{H}|$

Dans la vision "officielle" de la ludique, c'est à dire locative, on a qu'un objet de $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ est, en particulier, un objet de $\mathbf{G}$ (ou de $\mathbf{H}$). Ici le sous-typage est l'inclusion.

Pour la vision logique traditionnelle (spirituelle ou délocalisée), c'est dans l'incarnation qu'on a des objets de type (a, b) (qui en effet ne sont pas des objets de $\mathbf{G}$ ou $\mathbf{H}$).

Les connecteurs multiplicatifs

Les opérations sont effectuées sur les desseins.

Le connecteur multiplicatif commutatif $\odot$

Soient $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux desseins positifs, on définit le produit tensoriel* $\mathcal{U} \odot \mathcal{B}$ *par :*

- Si un des deux est le daimon alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = \mathcal{D}ai$*;*

- Sinon soit $(<>, I)$ *et* $(<>, J)$ *les premières actions respectives de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{U}$*.*

Si $I \cap J \neq \emptyset$ *alors* $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = \mathcal{D}ai$*.*

Sinon on remplace dans chaque chronique de $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{U}$ *la première action par* $(<>, I \cup J)$ *on obtient* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{U}'$ *et* $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{B}'$*.*

On retrouve la logique habituelle à condition de se placer dans un cadre ”spirituel” (délocalisé).

On retrouve alors dans le même cadre, exprimé par des propriétés des mêmes objet la notion d’être une preuve (être un dessein gagnant : obstiné, parcimonieux et uniforme), et pour une formule d’être vraie et d’être démontrable (être un comportement possédant un bon dessein).

Mais on a d'autres objets ...

D'autres connecteurs additifs ou multiplicatifs

Exemple On peut avoir avec le connecteur $\odot$ le résultat surprenant $true \odot true = false$.

En effet considèrons le comportement $\mathbf{G} = \{\mathcal{O}ne_0\}^{\perp\perp}$ où $\mathcal{O}ne_0$ est le dessein suivant :

$$\cfrac{\cfrac{}{0 \vdash}{\scriptstyle (0,\emptyset)}}{\vdash <>}{\scriptstyle (<>,\{0\})}$$ qui est gagnant.

Le comportement $\mathbf{G}$ est donc vrai. Par contre $\mathbf{G} \odot \mathbf{G}$ est le comportement **Dai** qui contient l'unique dessein $\cfrac{}{\vdash <>}{\scriptstyle \dagger}$ et est donc faux.

On peut interpréter **G** comme le fait de posséder un argument qui peut jouer contre dessein suivant :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 1}\dagger \quad \ldots \quad \dfrac{}{\vdash n}\dagger \quad \ldots \quad \ldots}{<>\vdash}(\{\{n\};n\in\mathbb{N}\})$$

que l'on peut interpréter comme "si tu me donne au moins un argument, j'abandonne".

Il est clair que $\mathbf{G} \odot \mathbf{G}$ n'a pas de dessein gagnant contre "donne-moi deux arguments".

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0,1}\dagger \quad \dfrac{}{\vdash 0,2}\dagger \qquad \ldots \quad \dfrac{}{\vdash n,m}\dagger \qquad \ldots \qquad \ldots}{<>\vdash}(\{\{n,m\};n\neq m\in\mathbb{N}\})$$

Bibliogaphie

- Andréoli, J.-M. (1992) Logic Programming with focusing Proofs in Linear Logic.
- Curien, P.-L. (2001) Introduction à la ludique. http://www.pps.jussieu.fr/˜curien
- Curien, P.-L. (2006) Introduction to linear logic and ludics, Part II
- Girard, J.-Y. (2001) Locus Solum. *Mathematical Structures in Computer Science* **11** (3) pp 301-506
- Girard, J.-Y. (2004) From Fondation to Ludics. Ehrhard, T., Girard, J.-Y. and Scott, P. *Linear Logic in Computer Science,* London mathematical Society, Lectures Notes Series, Cambridge University Press.
- Faggian, C., Hyland M. Designs, disputes and strategies, CSL 02. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, 2471, 2002.