# Annexe à « Forme, sens et géométrie du langage »

Alain Lecomte – Nantes, mars 2002

## *Réseaux de preuve*

On peut avoir une idée assez claire de la notion de réseau de preuve à partir de l'exemple suivant, où on cherche à démontrer un séquent dans le cadre de la logique linéaire intuitionniste.

Soit à démontrer :

$$A \otimes B, A \Rightarrow C \triangleright B \otimes C$$

Deux déductions sont possibles :

1)

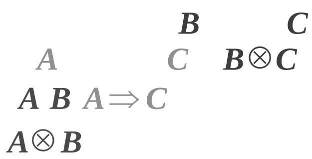
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \triangleright A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \triangleright B} \quad \dfrac{}{C \triangleright C}}{B, C \triangleright B \otimes C}}{A, B, A \Rightarrow C \triangleright B \otimes C}}{A \otimes B, A \Rightarrow C \triangleright B \otimes C}$$

2)

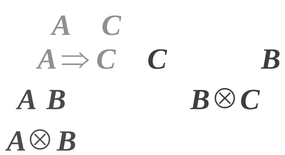
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \triangleright A} \quad \dfrac{}{C \triangleright C}}{A, A \Rightarrow C \triangleright C} \qquad \dfrac{}{B \triangleright B}}{A, B, A \Rightarrow C \triangleright B \otimes C}}{A \otimes B, A \Rightarrow C \triangleright B \otimes C}$$

Elles ne diffèrent en réalité que par des points inessentiels, comme l'ordre d'application des règles. Si nous ne retenons de ces déductions que les occurrences de formules correspondant à des pas où elles sont actives (ie. correspondent à l'application d'une règle), avec les sous-formules qui en résultent au pas en question, nous obtenons deux dispositions qui, « topologiquement » sont isomorphes :

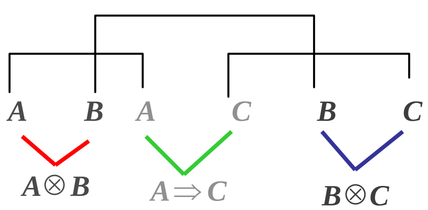
1)




2)

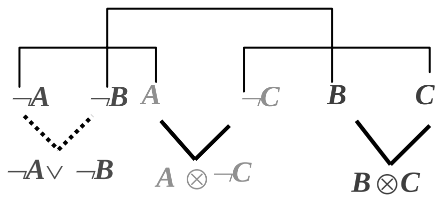



La structure de preuve commune aux deux déductions est donc :




où les liens supérieurs représentent les instances de l'axiome d'identité (liens axiomes) et les liens inférieurs représentent les applications de règles. Si nous voulons réciproquement partir d'un tel graphe et savoir s'il correspond bien à une déduction possible dans le système, nous devons distinguer les liens selon qu'ils correspondent à l'application d'une conjonction

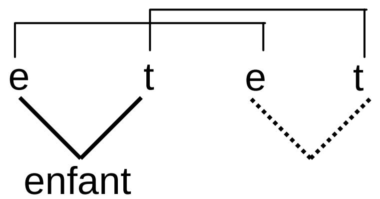
« droite » ou d'une disjonction « droite ». Pour cela, nous devons tenir compte de la polarité des formules : les formules de l'antécédent sont réputées de polarité négative, celle du conséquent de polarité positive. Mais, si on « plonge » ce système dans la logique linéaire classique, on peut tout ramener à des formules de polarité positive. En ce cas, une conjonction de polarité négative (donc une conjonction gauche) correspondra à une disjonction de polarité positive (donc une disjonction droite) et une disjonction gauche à une conjonction droite. Les conjonctions droite seront des liens de premier type, les disjonctions droite d'un second type. L'implication étant une disjonction, elle se convertit, si elle occurre à gauche, en une conjonction droite. D'où le graphe suivant :



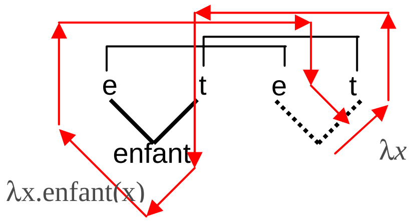

sa caractéristique est de rester connexe pour chaque suppression d'une branche d'un lien pointillé et de ne contenir aucun cycle strictement alternant (pointillé – plein) : le seul cycle est en effet un chemin qui emprunte deux arêtes pointillées à la suite. D'où la caractérisation géométrique des preuves.

## Application à la sémantique

Les déductions dans le système logique correspondant aux types sémantiques peuvent être codées par des réseaux. Voici par exemple un réseau qui code une preuve du séquent trivial :
**enfant** : **e** → **t** ⇒ α : **e** → **t**

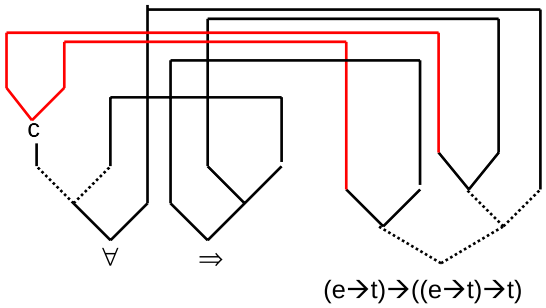



Nous savons qu'également un λ-terme peut coder cette preuve. La figure suivante montre la relation existant entre réseau et λ-terme. Celui-ci est obtenu à partir du réseau au moyen d'un parcours canonique.




Un déterminant (tel que tout, chaque, un etc.) se décompose sémantiquement en : un quantificateur (par exemple ∀), de type (e→t)→t et un connecteur logique (par exemple ⇒) de type t→(t→t). Il nécessite deux prédicats (type e→t) pour l'obtention d'une proposition (type t). Un déterminant est donc associé à un séquent :
t→(t→t), (e→t)→t ⇒ (e→t)→((e→t)→t)

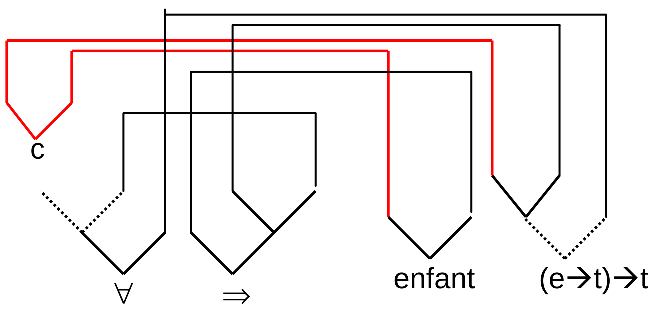
Si la flèche → est l'implication linéaire, on doit noter que le qjuantificateur a pour tâche de lier plusieurs occurrences de la même variable, ce qui va se traduire par le type : ( !e→t)→t (où ! est l'exponentielle classique de la logique linéaire) et donc le séquent sera :
t→(t→t), (!e→t)→t ⇒ (e→t)→((e→t)→t), dont voici alors une preuve présentée comme un réseau :



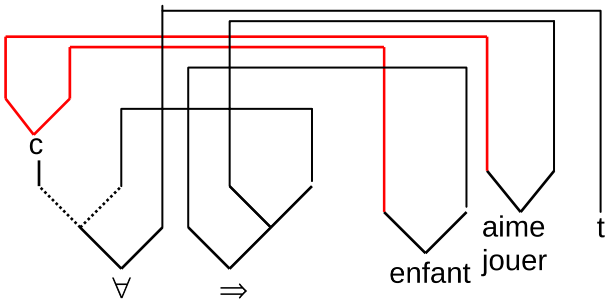

on notera que l'occurrence de ! permet d'utiliser un lien spécial, dit « de contraction », qui en fait permet ici de dédoubler un nœud terminal (liens rouges), et qui traduit le liage des variables dans une formule quantifiée.
Cette preuve peut être décodée sous la forme d'une déduction classique :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{e \triangleright e} \quad \dfrac{\dfrac{}{e \triangleright e} \quad \dfrac{\dfrac{}{t \triangleright t} \quad \dfrac{\dfrac{}{t \triangleright t} \quad \dfrac{}{t \triangleright t}}{t, t \to t \triangleright t}}{t, t, t \to (t \to t) \triangleright t}}{e, t, e \to t, t \to (t \to t) \triangleright t}}{e, e, e \to t, e \to t, t \to (t \to t) \triangleright t}}{e, e \to t, e \to t, t \to (t \to t) \triangleright t}}{e \to t, e \to t, t \to (t \to t) \triangleright e \to t} \quad \dfrac{}{t \triangleright t}}{e \to t, e \to t, t \to (t \to t), (e \to t) \to t \triangleright t}}{e \to t, t \to (t \to t), (e \to t) \to t \triangleright (e \to t) \to t}}{t \to (t \to t), (e \to t) \to t \triangleright (e \to t) \to ((e \to t) \to t)}$$

Un tel réseau peut ensuite être « appliqué » à un premier prédicat, ici « enfant » de manière à donner le réseau qui correspond à « tout enfant » :




puis un second prédicat, ici « aimer jouer » de manière à obtenir une proposition complète.




Finalement, nous ne gardons comme représentation sémantique d'un déterminant qu'une structure abstraite, où les nœuds racines ne sont pas marqués par des constantes logiques. Ces structures abstraites, qui sont de pures représentations topologiques, suffisent à exprimer le lien quantifieur – variables liées, qui doit être représenté d'une façon ou d'une autre au niveau d'interface CIL.