Pour une étude du langage via l'interaction : dialogues et sémantique en Ludique

Alain Lecomte[1] et Myriam Quatrini[2]

Résumé

Nous souhaitons dans ce texte illustrer la pertinence d'un nouveau point de vue pour une approche logique des langues naturelles. Parce que l'interaction nous apparaît comme centrale pour aborder les phénomènes langagiers, le cadre ludique, fait justement pour manipuler les concepts primitifs qui la constituent, nous paraît singulièrement approprié. Une telle étude a été initiée dans un projet intitulé "Prélude" [3] dont l'objectif était de transposer des concepts qui ont récemment émergé en logique vers l'étude du langage et d'utiliser les outils novateurs de la ludique dans une perspective de formalisation de divers domaines du langage. A l'occasion de ce projet, plusieurs pistes ont été explorées et balisées : l'étude des dialogues (formalisation, "fallacies", étude de l'argumentation) pragmatique (actes de langage), [7], [15], sémantique (nouvelle approche de la notion de forme logique) [17].
Nous présentons dans ce papier une approche de la signification des énoncés basée sur les concepts de la Ludique.

Abstract

The purpose of this paper is to illustrate the relevance of a new viewpoint on the formal study of Natural Language. Because Ludics allows to handle interaction and proposes a way to decompose interaction into its primitive elements, and since interaction seems to us crucial to treat language phenomena, the ludical approach seems convenient to renew this study. Such a study was initiated inside the ANR project "Prélude" which aimed at transposing concepts of Ludics and at using them as new tools in various domains of the Language study. Several tracks have been explored, with promising results, like the study of dialogues, argumentation and fallacies, pragmatics (speech acts), and [7], [15], semantics (a new approach of logical forms) [17].
We propose in this article an approach of the meaning of utterances based on a ludical concepts.

Mots clés : Interaction, Dialogues, Sémantique, Ludique, Processus, Convergence.

1. Ludique, Interactions et Langage

1.1. Ludique

La logique mathématique, et en particulier la théorie de la démonstration, ont connu, ces dernières décennies, une évolution majeure, essentiellement en lien avec le développement et

[1]Laboratoire : "Structures formelles du langage", Paris 8 Université/CNRS

[2]Laboratoire : "nstitut de Mathématiques de Luminy", Aix-Marseille Université/CNRS

[3]Prélude : *Pour une formalisation de la Pragmatique théorique basée sur la Ludique ...*, projet A.N.R. 2006/2009)

les enjeux de l'informatique théorique. Pour l'analyse philosophique et épistémologique de cette évolution de la logique mathématique dans sa confrontation contemporaine avec l'informatique théorique nous renvoyons à l'exposé très complet de J.-B. Joinet [14]. Pour un bref résumé de cette évolution, nous pointons les successifs changements de paradigme qu'a connus la théorie de la démonstration : alors que l'objet central de cette discipline était à l'origine la *formule* et ses propriétés de *satisfaisabilité*, on s'est, ensuite, essentiellement intéressé à la *preuve* et donc aux propriétés de *démontrabilité*, pour finalement se focaliser sur la dynamique interne aux preuves (l'élimination de la règle de coupure), c'est-à-dire à la *normalisation* comme modèle du calcul et à ses propriétés de *terminaison* et de *confluence.* Ces changements de paradigme se sont fait au départ essentiellement dans le cadre de la logique intuitionniste, qui, en tant que système formel a l'avantage de manipuler des preuves pour lesquelles justement la normalisation est *déterministe* et peut donc se proposer comme modèle de calcul. Toutefois, ce gain d'une procédure déterministe de l'élimination des coupures, a une contrepartie : la perte d'une des propriétés majeures des systèmes logiques : la symétrie. Avec la Logique Linéaire [8], J.-Y. Girard, non seulement propose un système formel dans lequel la normalisation a les bonnes propriétés d'un calcul tout en retrouvant les symétries de la logique classique (notamment une négation involutive), mais fournit de surcroît de nouveaux outils, comme la sémantique cohérente et les réseaux de preuves, qui vont s'avérer précieux pour l'étude des modèles de calcul issus de systèmes logiques et de la correspondance preuves-programmes. Ce nouveau point de vue va permettre de généraliser à la fois la notion de calcul (vers le parallélisme) et celle de preuves (d'abords interprétées par des fonctions puis par des relations, des graphes, puis enfin par des stratégies) pour s'intéresser finalement directement à *la dynamique* elle-même. Les réseaux de preuves permettent le développement d'un point de vue géométrique sur les preuves et la formulation d'un projet ambitieux appelé par J.-Y. Girard *Géométrie de l'Interaction.* L'enjeu de ce projet est de géométriser complètement les preuves, c'est-à-dire pouvoir les définir relativement à une notion d'*orthogonalité*, autrement dit, dans le cadre de la dynamique des preuves, par rapport à une notion d'*interaction.* Ce projet trouve une réalisation dans la *Ludique* [9], nouvelle théorie logique basée sur l'interaction.

La Ludique, s'émancipant a priori des notions de preuves et de formules, propose de redéfinir la logique, à partir des éléments plus primitifs sur lesquels se base l'interaction. Ces objets, appelés *desseins* ont été obtenus au terme à la fois d'une déconstruction de l'objet preuve comme support de l'interaction et d'une généralisation de l'objet preuve comme processus. Pour réaliser une telle déconstruction/généralisation, les aspects suivants sont fondamentaux :

- Lorsqu'on élimine les abstractions des formules, on a besoin d'une notion de *localisation* ou *adresse* où on peut insérer des objets. En termes informatiques, il s'agirait simplement des adresses-mémoire.
- Puisqu'on ne se réfère pas à une notion d'axiome logique donné a priori, ou de formule dont la satisfaction serait externe et que l'on veut faire interagir des tentative de preuves et de contre-preuves (ce que l'on résumera par le terme de *para-preuves*) on a besoin que les processus contiennent de façon interne la possibilité de terminer. D'où l'introduction d'une telle instruction d'arrêt : le *daïmon.* En terme de recherche de preuves, on peut l'interpréter comme un abandon.
- Même si les objets que l'on manipule ne sont pas des preuves mais des preuves généralisées, les étapes élémentaires de poursuite d'une interaction peuvent se comprendre comme le passage d'une formule à ses sous-formules, en traversant de bas en haut une règle de déduction. Toutefois une telle formule n'est pas connue a priori. L'étape élémentaire positive peut être comprise comme le fait de choisir un A_i dans une formule $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ (les A_i ne sont pas connus a priori, et d'ailleurs ne sont même pas considérées au niveau du dessein) et de considérer autant de branches sur lesquelles poursuivre l'interaction que de sous-formules conjointes qui constituent une telle formule A_i. La notion de preuve qui est pertinente pour représenter les desseins est celle

de *preuve focalisée*. La notion de focalisation a été découverte par J.-M. Andréoli, qui montre dans [1] qu'en Logique Linéaire, on peut regrouper en une seule étape de déconstruction des pas successifs, chacun attaché à un connecteur, quand ces connecteurs sont de même polarité.
La notion de *comportement*, c'est-à-dire d'un ensemble de desseins localisés à la même adresse, suffisamment complet par rapport à l'interaction (clôt par bi-orthogonalité), permet de retrouver la notion de *formule logique*. La présence dans un tel ensemble d'une preuve (essentiellement un dessein qui n'utilise pas la règle de daïmon) permet de retrouver la notion de *formule vraie*.
Une introduction informelle des objets de la Ludique est donnée au fil du texte. Une présentation précise et succinte de cette théorie est donnée en annexe. Nous renvoyons le lecteur, soucieux de découvrir, dans toute leur étendue, les notions mathématiques et les riches concepts de la Ludique, aux textes fondateurs [9], [10]. Nous l'invitons également à lire les introductions averties que sont [3], [5].

1.2. Interaction et langage

Au cours du XXème siècle, la logique mathématique, sous les auspices de Frege, Russell, Tarski et leurs descendants, a été un moteur puissant de la réflexion sur le langage. Pourtant la conception tarskienne de la vérité, si elle permettait de développer des travaux importants en théorie des modèles (débouchant sur les résultats fondamentaux que l'on sait comme le théorème de Löwenheim-Skolem), s'avérait trop restrictive pour s'appliquer au langage ordinaire. Les philosophes justement dits "du langage ordinaire" (Austin, Strawson, le second Wittgenstein) en firent tôt la remarque. Mais comment parler rigoureusement de la signification des énoncés sans faire référence à la logique et sans, à un moment donné, opérer une réduction sur des valeurs simples à manipuler, comme sont les valeurs de vérité ? D'autres essais, à la fois en logique et, de manière dérivée, en philosophie et en linguistique, avaient bien tenté d'autres voies. En particulier, l'intuitionnisme de Brouwer débouchait sur la fameuse hypothèse dite de Brouwer-Heyting-Kolmogorov, selon laquelle le sens ne résidait nulle part ailleurs que dans la preuve. Cette tradition a connu dans les années post-1970 un vif regain, particulièrement à cause de l'informatique qui exigeait une vision constructive, voire constructiviste, de la logique afin de lui servir de fondement. L'élaboration de langages de programmation fonctionnelle très évolués doit beaucoup à ces travaux et à cette approche.
Jusqu'à présent un aspect du fonctionnement du langage, fondamental, reste pourtant mal exploré : l'interaction. L'approche de la signification par la notion de preuve (en un sens très général) met l'accent sur l'aspect processuel du sens. Déclarer par exemple que " Pierre a encore fait une fugue " fait appel à un processus de construction qui met en place un opérateur d'itérativité et indique un point d'arrêt de l'itération. " Pierre et Marie se sont promenés ensemble " fait appel à un mécanisme de construction qui met en place deux processus, conjoints par un opérateur de parallélisme etc. Mais quelque chose échappe à la conceptualisation si on ne peut pas, en plus, décrire comment, en particulier dans le dialogue, deux énoncés interagissent. Une idée importante, popularisée entre autres par Steven Pinker [18], est que "le langage a émergé à partir de l'interaction entre des esprits (*minds*) humains ". Si cela est, alors il en porte la marque encore aujourd'hui. De fait, des mots ou des locutions, comme ceux qu'a souvent étudiés O. Ducrot (" mais ", " un peu ", " peu ", " quand même" etc.), contiennent en eux-mêmes une trace de cette interaction primitive, de même sans doute que les items sensibles à la polarité. Mais alors, pour représenter le langage, pour aborder ses différents aspects, il faut revenir à cette interaction, centrale, et au phénomène par excellence de l'interaction langagière : le dialogue. Cette idée est déjà présente chez O. Ducrot qui met l'accent, dans l'analyse des mots ci-dessus, sur les poursuites possibles du discours [4], notant par exemple que ce qui distingue « peu »de « un peu », c'est le fait qu'on ne dira pas : « Pierre a lu un peu de Zola, il ne le connaît donc presque pas. », ni

« Pierre a lu peu de Zola, donc il le connaît. », mais que l'on dira : « Pierre a lu un peu de Zola, il le connaît. », et « Pierre a lu peu de Zola, donc il ne le connaît presque pas. »Ce qui se dit ici du discours peut se dire aussi du dialogue : à un dialogue tel qu'à une réplique signalant que « Pierre a lu un peu de Zola », serait répondu : « Oui, je sais, il ne le connaît pour ainsi dire pas. », serait considéré comme mal formé[4]. Dans la même veine, de nombreuses tentatives de fonder le sens (et donc la sémantique des langues naturelles) sur l'interaction considérée comme un jeu ont été développées, ainsi les travaux de Hintikka, Kulas et Sandu ([12, 13]). Dans leurs interprétations, les significations sont des stratégies dans un *language game*. D'une certaine manière, c'est dans cette tradition que nous nous plaçons en développant une étude de la signification des phrases et des énoncés basée sur une interprétation possible en termes de jeu. Toutefois, le cadre utilisé (ludique) est non seulement centré sur l'interaction, mais en plus, il manipule, plutôt que des "preuves" figées par des contraintes externes (déductions dans un système formel au moyen de règles définies *a priori*), des objets, que nous nommons ici "structures élémentaires de l'interaction", qui préexistent à tout système de règles.

1.3. Signification et Ludique

Dans ce texte nous développons donc une approche de la signification ancrée sur une représentation des dialogues telle que l'autorise la ludique. Puisque, dans ce cadre, les objets sont complètement définis par leurs interactions, nous considérons que la signification des énoncés est accessible (on peut la décrire, la connaître, l'utiliser) à partir des *contextes* d'interaction, autrement dit principalement à partir des dialogues dans lesquels l'énoncé apparaît. Pour ce faire, nous associerons à la signification des énoncés un ensemble de desseins qui peuvent être compris intuitivement comme des supports de dialogues potentiels, des parcours de sens, des justifications d'un argument ... Cette approche suppose quelques positions méthodologiques :
- notre démarche est ascendante. Cela signifie que nous partons de l'observations des interactions possibles d'un énoncé avec d'autres énoncés (si possible en faisant varier les situations expérimentalement), en excluant un cadre définitoire trop strict et venu d'en haut (des formulation en logique des prédicats par exemple).
- conformément à la tradition, l'énoncé est une notion qui renvoie à un observable alors que la phrase est une unité définie en théorie syntaxique. Les deux sont dotés d'une interprétation, construite par une procédure externe dans le cas de la phrase et empiriquement incluse dans le cas de l'énoncé. De ce point de vue, on peut considérer que la sémantique d'une phrase est une abstraction à partir des énoncés concrets. Cette abstraction n'est pas directement donnée en extension mais nous pouvons en donner des éléments.
- dans la mesure où nous basons notre étude des objets sémantiques sur une perspective relationnelle focalisée sur l'interaction comme phénomène primitif, nous admettons n'avoir accès que partiellement aux objets étudiés. L'étude des interactions doit nous permettre d'en connaître des pans, de discriminer les objets différents.

La section 2 est consacrée à une formulation ludique des dialogues. Nous présentons en section 3 une définition de la sémantique des phrases et des énoncés en ludique, basée sur cette formalisation des dialogues. En section 4 nous montrons comment une articulation entre formalisation ludique des dialogues et sémantique des énoncés est possible et permet de proposer des outils et un cadre formel intéressants pour l'étude de l'argumentation et de la pragmatique.

[4]non qu'il soit « impossible », mais au sens où pour l'interpréter devraient intervenir des implicites difficiles à décoder.

2. Dialogues en Ludique

2.1. Formalisation des dialogues : première étape

Dans une perspective de formalisation, nous retenons de l'objet "dialogue" les éléments qui sont pertinents pour l'interaction, en oubliant pour l'instant le contenu des interventions. De ce point de vue, un dialogue est une suite d'interventions, dans laquelle on peut repérer :
- la première intervention qui initie l'échange,
- puis une alternance d'interventions, chacune des interventions intermédiaires s'ancrant sur une des interventions précédentes et, à son tour, créant des ouvertures à partir desquelles l'interlocuteur pourra s'accrocher pour poursuivre le dialogue.
- et enfin, soit une intervention qui clôt l'échange (une information est donnée ; un acquiescement est obtenu ; ...) ; soit le constat d'une situation où le dialogue "échoue" sur un désaccord, un sentiment d'incompréhension ...

Nous allons illustrer, sur des exemples, comment il est possible de représenter les dialogues à partir de ces éléments saillants pour l'interaction, et comment dès lors il devient possible d'en rendre compte en Ludique.

2.1.1. Exemple 1 : un dialogue collaboratif

Le dialogue suivant, extrait du roman *Le comte de Monte Cristo* de A. Dumas, met en scène deux protagonistes : l'abbé Faria (F) et Edmond Dantès (E). Il a été très légèrement modifié pour la simplicité de la présentation :

F : A qui votre disparition pouvait-elle être utile ? (I_1)
E : J'allais devenir capitaine du *Pharaon* ; j'allais
épouser une belle jeune fille. (I_2)
F : Quelqu'un avait-il intérêt à ce que vous ne devinssiez pas
capitaine du *Pharaon* ? (I_3)
E : [...], Un seul homme. [...], (I_4)
F : Comment se nommait-il ? (I_5)
E : Danglars. (I_6)
F : Bien (I_7) ou bien
F : Parlez moi maintenant de cette jeune fille que vous alliez épouser (I'_7)

Ci-dessous, nous décrivons, pas à pas, une représentation de ce dialogue jusqu'à arriver à un récit du dialogue (de l'interaction), vu de chacun des points de vue des deux interlocuteurs (ce récit formalisé est à lire du bas vers le haut, on retrouvera à gauche le point de vue de **F** et à droite celui de **E**).

1. La première intervention initiant le dialogue est une question que **F** pose à **E** : *A qui votre disparition pouvait-elle être utile ?*. Ce faisant, **F** propose un lieu à partir duquel une interaction peut se dérouler. Ci-dessous, ce lieu est arbitrairement dénoté 0 ; en ce lieu, **F** fait une intervention I_1 par laquelle un nouveau lieu 0.1 est créé, sur lequel **E** pourra accrocher son intervention, s'il accepte l'interaction :

$$\frac{0.1}{0}\, I_1$$

2. Les deux interventions suivantes peuvent s'analyser comme suit :

   – **E** accepte cette intervention et y répond en disant : *J'allais devenir capitaine du* `Pharaon` *; j'allais épouser une belle jeune fille.*
   Cette intervention I_2 s'ancre en 0.1 à la suite de l'intervention I_1 de **F** et crée deux nouveau lieux 0.1.1 et 0.1.2, car elle ouvre deux poursuites possibles au dialogue : **F** pourra continuer à partir du fait que **E** va devenir capitaine du pharaon, ou bien à partir du fait que **E** va se marier. Ci dessous, la ligne pleine entre les deux occurrences du lieu 0 matérialise l'interaction.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 0.1 \\ \hline 0 \end{array}{\scriptstyle I_1} & \qquad & \begin{array}{c} 0.1.1 \quad 0.1.2 \\ \hline 0.1 \\ 0 \end{array}{\scriptstyle I_2} \\
\hline
\end{array}
$$

   – **F** poursuit en choisissant d'ancrer l'intervention suivante I_3 : *Quelqu'un avait-il intérêt à ce que vous ne devinssiez pas capitaine du Pharaon ?* sur le lieu 0.1.1, c'est-à-dire choisit de poursuivre à partir de l'information donnée par **E** qu'il allait devenir capitaine du Pharaon.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 0.1.1.1 \\ \hline {\scriptstyle I_3} \\ 0.1.1 \quad 0.1.2 \\ 0.1 \\ \hline {\scriptstyle I_1} \\ 0 \end{array} & \qquad & \begin{array}{c} 0.1.1 \quad 0.1.2 \\ \hline {\scriptstyle I_2} \\ 0.1 \\ 0 \end{array} \\
\hline
\end{array}
$$

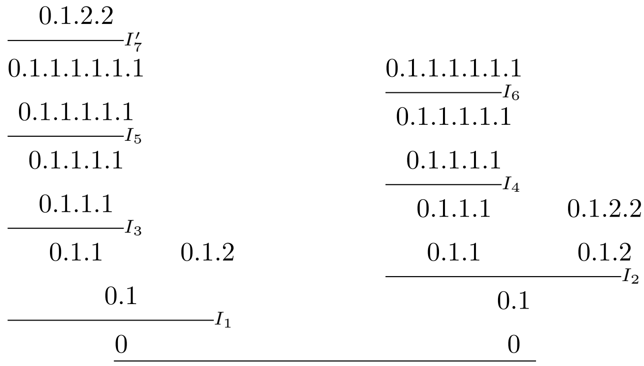
3. Le dialogue continue d'une des façons suivantes :

   - il peut se conclure. Après l'intervention I_6 par laquelle **E** donnait le nom de *Danglars*, **F** qui a obtenu l'information demandée, peut clore le dialogue. Ce que l'on représente ci-dessous en annotant par le symbole[5] † l'intervention I_7 : *Bien.*

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \hline {\scriptstyle I_7=\dagger} \\ 0.1.1.1.1.1.1 \\ 0.1.1.1.1.1 \\ \hline {\scriptstyle I_5} \\ 0.1.1.1.1 \\ 0.1.1.1 \\ \hline {\scriptstyle I_3} \\ 0.1.1 \qquad 0.1.2 \\ 0.1 \\ \hline {\scriptstyle I_1} \\ 0 \end{array} & \qquad & \begin{array}{c} 0.1.1.1.1.1.1 \\ \hline {\scriptstyle I_6} \\ 0.1.1.1.1.1 \\ 0.1.1.1.1 \\ \hline {\scriptstyle I_4} \\ 0.1.1.1 \\ 0.1.1 \qquad 0.1.2 \\ \hline {\scriptstyle I_2} \\ 0.1 \\ 0 \end{array} \\
\hline
\end{array}
$$

   - ou se poursuivre ... En effet, le lieu 0.1.2 est toujours disponible et **F** a loisir de poser alors une question au sujet du mariage prévu de **E** :

[5] Ce symbole est utilisé en Ludique pour signifier l'arrêt d'une interaction et peut être compris comme un abandon pendant une recherche de preuve.



2.1.2. Exemple 2 : une controverse

L'exemple suivant est extrait d'un ouvrage de Schopenhauer [19] intitulé “Dialectica eristica” ou souvent édité en français sous le titre “L'art d'avoir toujours raison”. L'auteur se propose de définir la dialectique comme l'art de gagner les controverses, c'est-à-dire “avoir le dernier mot”. Schopenhauer donne alors dans cet ouvrage un florilège de “stratagèmes”. Le premier de ces stratagèmes nommé “l'extension” est illustré par l'échange suivant :

J'ai dit : “Les anglais sont supérieurs à toutes les autres nations quant à l'art dramatique.” L'adversaire a voulu risquer une instantia et m'a répliqué : “Tout le monde sait qu'ils ne valent rien en musique et par conséquent aussi sont nuls quant à l'opéra.” Je réfutai en rappelant “que la musique n'est pas comprise dans la catégorie de l'art dramatique ; que ce dernier terme ne désignait que la tragédie et la comédie” [...]

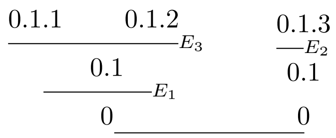
Nous représentons cet échange :

–E_1 : Les anglais sont supérieurs à toutes les autres nations quant à l'art dramatique.

–E_2 : ..., les anglais sont nuls en opéra.

–E_3 : Mais par art dramatique, on entend seulement comédie ou tragédie.

par l'interaction entre le locuteur S et son interlocuteur A :



S n'accepte pas de poursuivre l'échange selon l'énoncé E_2 que A a avancé. C'est la raison d'être de l'énoncé E_3 : préciser que S n'accepterait l'échange que si son interlocuteur déclinait l'art dramatique en comédie ou tragédie mais pas en opéra. Ceci s'exprime par le fait que l'action négative ne correspondant pas à l'action positive en miroir, l'interaction échoue (diverge en termes ludiques).

2.1.3. La Ludique permet de rendre compte de telles interactions

Ces figures qui émergent pour rendre compte de l'échange du point du vue de chacun des interlocuteurs sont justement les objets de la Ludique : les **desseins**.

Les desseins sont définis dans [9] comme des ensembles de chroniques, c'est-à-dire des suites alternées d'actions. Une action (positive ou négative) consiste à choisir un foyer (soit le lieu initial, soit parmi des lieux créés précédemment) et à créer à son tour de nouveaux lieux sur lesquels l'interaction peut continuer. Un dessein peut être représenté par un **dessin**, selon une représentation qui met en évidence son interprétation en termes de tentative de preuve (lue du bas vers le haut). Précisément un dessin est un arbre de “fourches” $\Gamma \vdash \Delta$ (où Γ contient ou plus un lieu et Δ est un ensemble fini de lieux) qui est construit en utilisant les trois règles suivantes :

- **Règle positive** (faire une intervention)

La règle	Exemple dans les dialogues	Exemple dans une preuve
$\dfrac{\cdots \quad \xi.i \vdash \Delta_i \quad \cdots}{\vdash \Delta, \xi}(\xi, I)$	$\dfrac{0.1.1 \vdash \quad 0.1.2 \vdash}{\vdash 0.1}I_2$	$\dfrac{A_1 \vdash \quad A_2 \vdash B}{\vdash A_1^{\perp} \otimes A_2^{\perp}, B}$

- **Règle négative** (anticiper, enregistrer les interventions de l'interlocuteur)

La règle	Exemple dans les dialogues	Exemple dans une preuve
$\dfrac{\cdots \quad \vdash \xi.I, \Delta \quad \cdots}{\xi \vdash \Delta}(\xi, \mathcal{N})$	$\dfrac{\vdash 0.1.1 \qquad \vdash 0.1.2}{0.1 \vdash}E_3$	$\dfrac{\vdash A_1, C \qquad \vdash A_2, C}{A_1^{\perp} \oplus A_2^{\perp} \vdash C}$

- **Daïmon** (clôre un échange sur une convergence ou une recherche de preuve sur un abandon)

La règle	Exemple dans les dialogues	Exemple dans une (para)preuve
$\dfrac{}{\vdash \Delta}\dagger$	$\dfrac{}{\vdash 0.1.1.1.1.1}\dagger$	$\dfrac{}{\vdash A \otimes A^{\perp}}\dagger$

Le dialogue entre F et E est alors représenté par l'interaction suivante entre deux desseins qui rendent compte chacun des points de vue des deux interlocuteurs :

- Dans le cas où F clôt le dialogue une fois que l'information *“Danglars”* a été donnée :

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0.1.1.1.1.1.1, 0.1.2}\dagger}{0.1.1.1.1.1 \vdash 0.1.2}}{\vdash 0.1.1.1.1, 0.1.2}}{0.1.1.1 \vdash 0.1.2}}{\vdash 0.1.1, 0.1.2}}{0.1 \vdash}}{\vdash 0}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.1.1.1.1.1.1 \vdash}{\vdash 0.1.1.1.1.1}}{0.1.1.1.1 \vdash}}{\vdash 0.1.1.1}}{0.1.1 \vdash} \qquad 0.1.2 \vdash}{\vdash 0.1}}{0 \vdash} \\
\hline
\end{array}$$

- ou, dans le cas où F continue le dialogue en interrogeant E sur son mariage :

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{0.1.2.2 \vdash 0.1.1.1.1.1.1}}{\vdash 0.1.1.1.1.1.1, 0.1.2}}{0.1.1.1.1.1 \vdash 0.1.2}}{\vdash 0.1.1.1.1, 0.1.2}}{0.1.1.1 \vdash 0.1.2}}{\dfrac{\vdash 0.1.1, 0.1.2}{0.1 \vdash}}}{\vdash 0}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.1.1.1.1.1.1 \vdash}{\vdash 0.1.1.1.1.1}}{0.1.1.1.1 \vdash}}{\vdash 0.1.1.1}}{0.1.1 \vdash} \qquad 0.1.2 \vdash}{\vdash 0.1}}{0 \vdash} \\
\hline
\end{array}$$

Cette représentation du dialogue sous forme d'interaction entre des desseins originaux de Girard permet de rendre compte de l'échange une fois que celui-ci a eu lieu et que sont connues les interventions successives. Nous pouvons toutefois être intéressés par la dynamique d'un dialogue qui est en train de se dérouler. Une telle représentation sera davantage adaptée pour une analyse de la construction des interventions. Nous utilisons alors les c-desseins de K. Terui [20] qui étendent les desseins originaux de Girard et présentent des caractéristiques qui nous intéressent particulièrement dans une perspective de formalisation des dialogues. Tout d'abord, les c-desseins ne sont pas nécessairement en forme normale mais peuvent contenir eux-même des interactions. Or, un des enjeux de la modélisation interactive des interventions dialogiques est justement de décrire comment les interventions sont produites à partir :

– des fins poursuivies par un locuteur lors d'un dialogue,
– des interventions de son interlocuteur
– d'un ensemble de connaissances et de représentations privées, etc.. . ..

Les c-desseins permettent particulièrement de rendre compte de telles constructions dynamiques. En outre, la linéarité de leur expression et l'usage qu'ils font de variables permettent de rendre compte, pas à pas, des interactions successives sans qu'il soit nécessaire à chaque pas d'avoir une connaissance a priori de la suite de l'échange.

Une présentation précise de ces objets est donnée en annexe. Rappelons juste ici quelques unes de leurs caractéristiques par rapport aux desseins originaux de Girard.

Plutôt que par des arbres de fourches (dispositions de lieux), les c-desseins ont une écriture linéaire, ils peuvent être décrits comme des λ-*termes généralisés*, au sens où il n'y a pas une unique opération de réduction, mais un nombre quelconque, éventuellement infini, dépendant d'une signature $\mathcal{A}$. La signature $\mathcal{A}$ est un ensemble de couples de noms munis d'une arité : (a, n) et pour chaque $a \in \mathcal{A}$, $\overline{a}/a$ généralise l'opération de réduction définie par le couple "abstraction/application" du λ-calcul et qui s'écrit $(\lambda x.P).N$ en une opération de réduction n-aire (lorsque n est l'arité de a) qui s'écrira alors $a(x_1, \ldots, x_n).P||\overline{a} < N_1, \ldots, N_n >$.

Les c-desseins peuvent encore être vus comme des suites alternées d'actions. Toutefois, les actions sont ici les éléments de la signature $\mathcal{A}$ (les actions des desseins de Girard sont alors un cas particulier où les noms sont des ensembles finis d'entiers et l'arité le cardinal de l'ensemble). Les actions positives peuvent être propres sous forme $\overline{a}$ où $a \in \mathcal{A}$ ou impropres : Ω et † qui représentent respectivement la divergence et la convergence d'une interaction. De même les actions négatives peuvent être propres, elles ont la forme $a(x_1, \ldots, x_n)$ et correspondent au liage de variables ou bien sont des variables.

Les coupures (interactions) sont explicites (indiquées par le symbole $||$) et internalisées à l'intérieur des termes (à l'instar des λ-termes). Comme en λ-calcul où un terme contient comme sous-termes des rédex de la forme $(\lambda x.P).N$ qui se normalisent en $P[N/x]$, un c-dessein contient des sous-termes "rédex" sous la forme $a(x_1, \ldots, x_n).P||\overline{a} < N_1, \ldots, N_n >$ qui se normalisent en $P[N_1/x_1, \ldots, N_n/x_n]$.

Les c-desseins sont co-inductivement définis :

– Les c-desseins négatifs sont définis par :
  $N = \quad x \quad | \quad \Sigma_{a \in A} a(\vec{x}).P_a$
– Les c-desseins positifs sont définis par :
  $P = \quad \Omega \quad | \quad \dagger \quad | \quad N_0||\overline{a} < N_1, \ldots, N_n >$

Dans une perspective de représentation des dialogues, nous posons comme précédemment :
- une action positive $\overline{a}$ représente un énoncé avancé par le locuteur,
- une action négative $a(\vec{x})$ représente un énoncé de l'interlocuteur que le locuteur enregistre ou anticipe.
- la présence d'un sous-dessein $a(x).\Omega$ indique que si son interlocuteur avance l'énoncé a, le locuteur n'accepte pas la poursuite du dialogue.
- la présence d'un sous-dessein $a(x).\dagger$ indique que si son interlocuteur avance l'énoncé a, le locuteur est prêt à clore le dialogue, sur une entente.

Et comme précédemment, nous pouvons utiliser les c-desseins pour rendre compte des interventions échangées au cours d'un dialogue du point de vue de chacun des locuteurs. Ainsi le dialogue[6] entre F et E est une interaction entre les deux desseins suivants :
- point de vue de F :
$x_0||\overline{e_1} < e_{2(z_1,z_2)}.z_1||\overline{e_3} < e_4(u).u||\overline{e_5} < e_6(v).\dagger >>>$ (lorsque F clôt le dialogue une fois que l'information "Danglars" est donnée.)
- point de vue de E :
$e_1(y).y||\overline{e_2} < e_3(z).z||\overline{e_4} < e_5(w).w||\overline{e_6} < s >, t >$
où les actions e_1, e_2,..., e_6 correspondent aux énoncés constituant les interventions I_1, I_2, ..., I_6.

Ce formalisme nous permet aisément de représenter la dynamique du dialogue. Chaque intervention est représentée par un c-dessein dont la forme est adaptée à la place de l'intervention dans l'échange :
- si l'intervention initie le dialogue, elle correspond à un c-dessein positif I_1 de la forme $x||\overline{e_1} < \mathcal{N} >$, autrement dit, elle réserve une place x pour une réponse de l'interlocuteur qui est invité à y loger un dessein qui interragira avec l'énoncé $\overline{e}$ que contient l'intervention. L'anticipation éventuellement construite par le locuteur est contenue dans le dessein $\mathcal{N}$, qui peut être simplement une variable z dans le cas où l'intervention est vraiment complètement ouverte.
- si l'intervention prend place à la suite d'une autre, elle correspond à un c-dessein I_2 de la forme $e_1(y).y||\overline{e_2} < \mathcal{M} >$ (si e_1 est l'énoncé constituant cette intervention précédente). De telle sorte que prenant la place de x, ce c-dessein négatif donne lieu à une interaction

$$I_1[I_2/x] = (e_1(y).y||\overline{e_2} < \mathcal{M} >)||\overline{e_1} < \mathcal{N} >$$

dont une étape de normalisation donne le dessein positif $\mathcal{N}||\overline{e_2} < \mathcal{M} >$.
Dans le cas le plus simple que nous considérons pour l'instant, où les intervention sont complètement ouvertes, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des variables, le c-dessein résultat d'une étape de normalisation est en forme normale $z||\overline{e_2} < t >$ et constitue un état courant, c'est-à-dire une invitation à l'interaction à laquelle le premier locuteur peut répondre à son tour.

Ainsi dans le dialogue entre E et F, on peut, sans trop de simplification abusive, considérer que chaque intervention est ouverte. Le dialogue est alors représenté comme suit :

[6] I_1 : A qui votre disparition pouvait-elle être utile ? – (I_2) J'allais devenir capitaine du *Pharaon* ; j'allais épouser une belle jeune fille. – I_3 : Quelqu'un avait-il intérêt à ce que vous ne devinssiez pas capitaine du *Pharaon* ? – I_4 [...], Un seul homme. [...] – I_5 : Comment se nommait-il ? – I_6 : Danglars. I_7 : Bien

Le dialogue	Intervention de F	Interaction / état courant	Intervention de E
A qui votre disparition ...	$\mathcal{I}_1$=$x_0\|\|\overline{e_1} < x >$		
		$\mathcal{E}_1 = \mathcal{I}_1$	
J'allais devenir capitaine ...			$\mathcal{I}_2$= $e_1(y).y\|\|\overline{e_2} < z >$
		$\mathcal{E}_1[\mathcal{I}_2/x] =$ $(e_1(y).y\|\|\overline{e_2} < p, q >)\|\|\overline{e_1} < x >$ $\mapsto \mathcal{E}_2 = x_1\|\|\overline{e_2} < z >$	
Quelq'un avait-il intérêt ...	$\mathcal{I}_3$=$e_2(u).u\|\|\overline{e_3} < v >$		
		$\mathcal{E}_2[\mathcal{I}_3/x_1]$ $\mapsto \mathcal{E}_3 = u\|\|\overline{e_3} < v >$	
Un seul homme ...			$\mathcal{I}_4$= $e_3(t).t\|\|\overline{e_4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3. Ludique et sémantique

Afin de développer une interprétation interactive des énoncés, nous utilisons le cadre ludique à la fois :
- en tant que métaphore : de la même façon que les desseins sont définis par leurs orthogonaux, la signification d'un énoncé est donnée par ses énoncés duaux, c'est-à-dire ceux avec lesquels l'interaction converge.
- et en tant que cadre de formalisation : la signification d'un énoncé est un ensemble de desseins, c'est-à-dire un ensemble de supports d'interaction potentielles (par exemple les justifications d'un argument, les poursuites de dialogues, des parcours de sens,...).

Ainsi, en associant à la sémantique d'un énoncé un ensemble de desseins, nous voyons cette signification non pas comme un contenu mais plutôt comme un ensemble de chemins par lesquels accéder à d'autres énoncés dans différents plans de réseaux relationnels. Chaque élément de la sémantique d' un énoncé est un noeud dans un graphe servant de support au sens qui peut s'y déployer comme processus de parcours et de réécriture de graphes [21], [16]. Cette formalisation de la signification que permet la Ludique est propice à de nombreux développements. Nous allons voir dans ce texte qu'elle permet non seulement de revisiter la notion de *forme logique* mais qu'elle semble également pouvoir fournir un cadre pertinent pour aborder différents aspects de la sémantique qui dépassent a priori la décomposition logique de l'énoncé comme par exemple la synonymie partielle entre deux énoncés.

3.1. Formes logiques

La notion de forme logique est centrale dans l'étude de la sémantique des langues naturelles et particulièrement dans la sémantique formelle. La possibilité d'associer à une phrase une formule du calcul des prédicats conditionne bien-sûr l'existence d'une sémantique véríconditionnelle mais permet également de formuler et formaliser des questions majeures en sémantique comme celle de la portée des quantificateurs. Un des intérêts des formes logiques est qu'elles permettent de discriminer entre plusieurs significations d'un énoncé a priori ambigu, comme le suivant :

(1) *Tous les linguistes parlent une langue africaine.*

Traditionnellement deux formes logiques peuvent être associées à cette phrase selon que l'article indéfini "une" a une portée large ou étroite.

$$
\begin{array}{ll}
S_1 = & \forall x(L(x) \Rightarrow \exists y(A(y) \wedge P(x,y))) \\
S_2 = & \exists y(A(y) \wedge \forall x(L(x) \Rightarrow P(x,y)))
\end{array}
$$

Où $L(x)$, $A(y)$ et $P(x,y)$ sont respectivement des formules associées aux énoncés “x est un linguiste”, “y est une langue africaine”, et “x parle la langue y”.
La question se pose alors de savoir comment trouver ces formes logiques. C'est un des plus jolis résultats de la sémantique de Montague et de l'interface syntaxe/sémantique des grammaires catégorielles que de permettre de calculer ces formes logiques à partir de l'analyse syntaxique des phrases. Toutefois le fait d'attribuer aux éléments terminaux (atomiques) que sont les articles définis ou indéfinis des termes construits à partir des quantificateurs universels ou existentiels n'est pas justifiée plus avant, il est admis comme allant de soi.
Nous proposons ici de retrouver une contrepartie ludique à la notion de forme logique à partir d'une interprétation interactive, ce qui met entre parenthèses, ne serait-ce que provisoirement, cette question de l'attribution de quantificateurs aux déterminants.
Pour cela, nous partons du constat qu'il existe des énoncés possibles entrant “en résonnance” avec un énoncé donné. Ces énoncés sont ceux qui peuvent s'articuler à l'énoncé de référence pour constituer un dialogue. Nous faisons ici confiance à l'intuition du locuteur, qui sait toujours déterminer si un enchaînement dialogique est bien ou mal formé. Prenons d'abord l'exemple d'un énoncé en principe non ambigu comme :

(2) *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse.*

Il est alors admis qu'un échange comme le suivant :

a_1 *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse*

b_1 *même Paul, tu crois ?*

est acceptable, alors que :

a_2 *Tout candidat au bac attend les résultats du bac avec angoisse*

b_2 **oui, ils s'en fichent complètement*

ne l'est pas. Nous dirons en ce cas que b_1 est un énoncé dual de a_1, mais certainement pas b_2. Ce genre de “test” peut être appliqué à de nombreux exemples, et c'est lui en particulier qui permet de discriminer les différents sens de (1), et pas une assignation de représentations a priori.

Tout d'abord, remarquons que les énoncés suivants peuvent être considérés comme duaux (au sens précédent) de l'énoncé (1) dans les différents cas suivants :

- Lorsque “une” a une portée étroite l'interaction converge avec les énoncés :
  (a) Il y a un linguiste qui ne parle aucune langue africaine.
  (b) Est-ce que même Chomsky parle une langue africaine ?
  (c) Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky ?
- Lorsque “une” a une portée large, l'interaction est possible avec les énoncés :
  (d) Il n'y a aucune langue africaine parlée par tous les linguistes.
  (e) Quelle est cette langue africaine que parlent tous les linguistes ?

Nous poussons alors plus loin cette utilisation de l'interaction pour rendre compte de l'ambiguïté ; la formalisation ludique des dialogues esquissée dans la section précédente explicite la distinction entre les deux lectures évoquées en leur associant deux ensembles distincts de desseins. De surcroît, nous allons voir que cette formalisation nous permet d'obtenir des représentations logiques qui ressemblent aux formules traditionnellement associées à ces deux lectures, mais d'une manière empiriquement fondée.
Nous reprenons la représentation des desseins par des dessins (arbres de lieux) pour la simplicité de la présentation.
Supposons qu'un locuteur avance l'énoncé (1) en assumant le premier sens (“une” a la portée

étroite) et en s'attendant à recevoir des questions sur un certain nombre de linguistes. Nous pouvons représenter cette intervention par un dessein (reprenant alors l'esquisse de formalisation des dialogues que nous avons faite dans la section précédente) :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\vdash x.1.5\ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}{\scriptstyle(1)}$$

Dans ce cas nous observons que l'interaction entre cette intervention et celle d'un interlocuteur qui rétorquerait (b) ("Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky") peut se poursuivre :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\vdash x.1.5\ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}{\scriptstyle(1)} \quad\Bigg|\quad \dfrac{\dfrac{x.1.5\vdash}{\vdash x.1}{\scriptstyle(c)}\qquad \vdash x.2}{x\vdash}$$

Alors que l'interaction entre cette intervention et celle d'un interlocuteur qui rétorquerait (d) ("Quelle est cette langue africaine parlée par tous les linguistes ?") diverge :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\vdash x.1.5\ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x}{\scriptstyle(1)} \quad\Bigg|\quad \dfrac{\vdash x.1\qquad \dfrac{x.2.0\vdash}{\vdash x.2}{\scriptstyle(d)}}{x\vdash}$$

Nous pouvons ainsi repérer, dans l'ensemble des desseins associé à la sémantique de la phrase (1) deux "sous-ensembles" : des desseins qui ont comme première action $(+, x, \{1\})$ et d'autres qui ont comme première action$(+, x, \{2\})$.

Poursuivons l'exploration d'une justification de (1) que nous venons de commencer ci-dessus. Le locuteur qui avait avancé (1) peut répondre :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash\quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}{\scriptstyle(c_2)}\qquad \ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x} \quad\Bigg|\quad \dfrac{\dfrac{x.1.5\vdash}{\vdash x.1}{\scriptstyle(c)}\qquad \vdash x.2}{x\vdash}$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe | (c) : Quelle est la langue africaine parlée par Chomsky ?

Où les lieux $x.1.5.8$ et $x.1.5.9$ correspondent respectivement aux énoncés contenus dans la dernière intervention du locuteur :*La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe.*, c'est-à-dire les énoncés : *Chomsky parle arabe.*, et *L'arabe est une langue africaine.*.
Le locuteur est prêt à recevoir à nouveau des questions :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots\vdash x.1.n\ldots\qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash\quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}{\scriptstyle(c_2)}\qquad \ldots\vdash x.1.m\ldots}{x.1\vdash}}{\vdash x} \quad\Bigg|\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x.1.5.8.6\vdash x.1.5.9}{\vdash x.1.5.8, x.1.5.9}}{x.1.5\vdash}}{\vdash x.1}{\scriptstyle(c)}\qquad\quad \vdash x.2}{x\vdash}$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe | (c_3) : Que vous placez dans les langues africaines ?

ou :

$$\dfrac{\dfrac{\dots\vdash x.1.n\dots \qquad \dfrac{x.1.5.8\vdash \quad x.1.5.9\vdash}{\vdash x.1.5}(c_2) \qquad \dots\vdash x.1.m\dots}{x.1\vdash}}{\vdash x}$$

(c_2) : La langue africaine parlée par Chomsky est l'arabe

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x.1.5.9.4\vdash x.1.5.8}{\vdash x.1.5.8, x.1.5.9}(c_3')}{x.1.5\vdash}}{\vdash x.1} \qquad \vdash x.2}{x\vdash}$$

(c_3') :Je ne crois pas que Chomsky connaisse vraiment l'arabe

Cette exploration d'un échange possible permet de pointer une forme de desseins que l'on peut résumer comme ci-dessous et qui appartiennent vraisemblablement à l'ensemble des desseins associé à la sémantique de (1) :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\\ \vdash x.1.n\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}\\ \vdots\\ x.1.5.8\vdash\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{E}'\\ \vdots\\ x.1.5.9\vdash\end{array}}{\vdash x.1.5}E_3 \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\\ \vdash x.1.m\end{array}}{x.1\vdash}}{\vdash x}E_1$$

E_1 : Le locuteur assume l'énoncé (1) dans sa première acception.
L'interaction peut continuer sur chacun des linguistes :
Un énoncé E_3 permet d'exhiber la langue parlée par tel linguiste ;
Le dessein $\mathcal{E}$ est une justification de "Cette langue est une langue africaine" ;
Le dessein $\mathcal{E}'$ est une justification de "Le linguiste considéré parle telle langue ".

Nous pouvons alors revenir à une lecture "logique" de cette analyse. En effet, la correspondance vue au 2.1.7. entre dialogue et preuve nous permet d'associer aux lieux des formules, aux actions des applications de règles et au déroulement du dialogue une décomposition de formule. Le lieu x initial en vient alors à être occupé par une formule construite avec les connecteurs positifs de la logique linéaire que sont $\oplus$ et $\otimes$ et avec la négation. La formule est certes une formule de logique linéaire et non une formule de logique classique. Nous savons cependant que la seconde est codable dans la première, à condition toutefois de disposer des exponentielles, qui ne sont pas explicitement abordées dans cet article.
Ce faisant, les desseins peuvent être lus comme des tentatives de preuves, et le dessein précédent correspond à la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_{d'}\\ \vdots\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A(e_d)}}{\downarrow A^{\perp}(e_d)\vdash} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash P(d,e_d)}}{\downarrow P^{\perp}(d,e_d)\vdash}}{\vdash \downarrow L^{\perp}(d), \oplus_y(\uparrow A(y) \otimes \uparrow P(d,y))} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_{d''}\\ \vdots\end{array}}{S_1^{\perp}\vdash}}{\vdash S_1 \oplus S_2}E_1$$

où S_1 et S_2 sont respectivement des formulations en Logique Linéaire Hyperséquentialisée (voir annexe) des formules $\forall x(L(x) \Rightarrow \exists y(A(y) \wedge P(x,y)))$ et $\exists y(A(y) \wedge \forall x(L(x) \Rightarrow P(x,y)))$.

Plus précisément, en utilisant un des résultats fondamentaux de la ludique qui est qu'à partir des opérations définissables sur les desseins et sur les ensembles de desseins, il est possible de retrouver les connecteurs de la logique linéaire, l'ensemble des desseins obtenus au terme de l'analyse ci-dessus peut être présenté de la façon suivante :

$$\mathbb{S} = (\&_x(\downarrow\mathbb{L}(x) \multimap \oplus_y (\downarrow\mathbb{A}(y) \otimes \downarrow\mathbb{P}(x,y)))) \oplus \downarrow (\oplus_y(\downarrow\mathbb{A}(y) \otimes \&_x(\downarrow\mathbb{L}(x) \multimap \downarrow\mathbb{P}(x,y)))).$$

qui est construit à partir d'ensembles de desseins $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$, et $\mathbb{P}(x,y)$ respectivement associés aux énoncés "x est un linguiste", "y est une langue africaine", et "x parle la langue y". On peut alors légitimement estimer qu'on a retrouvé une décomposition logique de la sémantique de l'énoncé (1). Et en particulier, si $\mathbb{L}(x)$, $\mathbb{A}(y)$, et $\mathbb{P}(x,y)$, sont des comportements, c'est-à-dire des ensembles de desseins qui correspondent à des formules (voir annexe) on retrouve la notion de "forme logique" et tout ce qui va avec : sémantique vériconditionnelle, portée des quantificateurs ...

Remarquons que cette décomposition logique est seulement une partie de la sémantique de l'énoncé (1) : un sous-ensemble de l'ensemble des desseins correspondant à sa sémantique ludique.

Remarquons également que l'interprétation ludique permet une approche plus fine de la forme logique. L'analyse ci-dessus a fait apparaître que les opération logiques pertinentes que l'on doit utiliser pour faire la décomposition logique de (1) ne sont pas les quantificateurs du premier ordre mais des connecteurs additifs généralisés. En effet, il n'y a aucune raison pour que les desseins (représentant des preuves) soient semblables (uniformes) au dessus de la règle qui fait passer d'une expression quantifiée à chaque de ses instantiations. Or l'étude de la quantification du premier ordre en Ludique [6] a établi que pour prétendre à bon droit représenter la preuve d'une formule quantifiée universellement, la famille de desseins candidate doit être uniforme. Cela signifie ici que si nous retournons à la sémantique comme sémantique des preuves au sens de Dummet, Martin-Löf, quand on énonce une phrase comme « tous les linguistes possèdent la propriété P », on met l'accent sur le fait que pour chaque linguiste, on est capable de fournir une preuve qu'il possède la propriété P, mais qu'en aucun cas nous nous imposons le fait que toutes ces preuves soient « uniformes », autrement dit reposent sur les mêmes pas de déduction. Pour un linguiste l, il pourra s'agir d'une preuve « directe » (par exemple nous rapportons le fait que nous l'avons entendu parler une langue africaine), alors que pour un autre linguiste, l', ce pourra être une preuve "déductive " (nous déduisons sa connaissance d'une langue africaine des travaux que nous avons lus de lui qui portaient sur de telles langues).

3.2. Au delà de la décomposition logique

Considérons maintenant un énoncé dont la forme logique n'est pas aussi saillante, ni aussi centrale :

(2) : Les anglais sont supérieurs à toutes les autres nations quant à l'art dramatique.

Et renouvelons l'expérience de sa confrontation avec des énoncés duaux. Nous envisageons ci-après quelques énoncés avec lesquels l'énoncé (2) pourrait légitimement interagir[7] :

a Les comédies italiennes sont bien meilleures pourtant.
b Il y a beaucoup d'auteurs médiocres, joués sur les scènes londoniennes.
c Les anglais ne valent rien en musique, et donc, sont nuls en opéra.

A priori, la forme syntaxique ("toutes les autres nations") de cet énoncé, devrait amener à une forme logique contenant une quantification universelle (ou plutôt, comme nous venons de le souligner, une conjonction additive généralisée). Une autre "quantification" pourrait apparaître dans

[7]Tout simplement, là encore, parce que les fragments de dialogue correspondants paraissent bien formés.

le déploiement de desseins appartenant à la sémantique de (2), correspondant à la déclinaison des "arts dramatiques". Sans anticiper sur une étude de la sémantique lexicale en lien avec la sémantique ludique des énoncés, il n'est pas clair toutefois qu'une telle quantification, pourtant pertinente pour l'interaction avec l'énoncé (c), apparaisse dans une décomposition logique de l'énoncé. En outre, même si l'énoncé (b) semble être à la limite du sens de (2), car elle nécessite un "glissement" de "art dramatique" vers "auteurs" et de "anglais" vers "scène londonienne", l'interaction semble néanmoins possible surtout si on introduit l'énoncé au moyen d'un marqueur comme "pourtant" ; l'étude d'une telle interaction et des conditions qui la rendent possible devraient justement nous apprendre quelque chose de la signification de l'énoncé (2).
Ainsi, bien qu'une forme logique obtenue à partir de la forme syntaxique de l'énoncé et contenant alors une quantification sur les nations peut être pertinente lors de l'interaction entre l'énoncé (2) et l'énoncé (a), elle semble sans réel intérêt pour comprendre l'interaction avec les deux autres énoncés (b) et (c). Le sens de (2), sollicité lors de l'interaction avec ces deux derniers énoncés n'utilise pas cette quantification. Les énoncés (b) et (c) semblent plutôt interagir avec un énoncé non explicité mais qui est sous entendu/induit par (2) et qui serait simplement :

(3) "Les anglais sont excellents en art dramatique".

La sémantique ludique peut alors ouvrir les pistes d'une étude de ce phénomène d'implicature. En première approche, la représentation de la sémantique des énoncés par des ensembles de desseins permet d'envisager que ces ensembles s'intersectent. Il s'agit alors d'étudier les frontières de telles intersections. On peut également envisager que des étapes d'interaction successives à partir de l'énoncé (3) amènent à (2) et réciproquement. Des opérateurs ludiques tels que les décalages semblent des candidats intéressants pour rendre compte de ces glissements sémantiques[8] . Ainsi, le fait d'associer à la sémantique d'un énoncé un ensemble de desseins, sans limites claires a priori, et surtout sans le réduire à correspondre seulement à une forme logique paraît plutôt une richesse qu'il va s'agir d'exploiter. Une première application peut être illustrée en explorant les liens entre la sémantique et l'étude des dialogues.

4. Sémantique et dialogues

La sémantique ludique des énoncés, qui est interactive et basée sur une représentation ludique des dialogues peut nous permettre d'enrichir et approfondir la modélisation des dialogues. Il est légitime de poser que le dessein associé à une intervention dans un dialogue est lié à la sémantique de l'énoncé matérialisant cette intervention. De façon intuitive, cela revient à dire qu'une intervention (au cours d'un dialogue) consiste à incarner dans le lieu de l'énonciation une signification de l'énoncé. En termes ludiques, cela signifie que les actions primitives des dialogues (les interventions) correspondent à des chroniques dans la sémantique de l'énoncé constituant l'intervention.
Ainsi, reprenant notre formalisation des dialogues, mais tenant compte maintenant du contenu des interventions nous posons qu'une intervention est un dessein :
- positif : $x|\overline{e_1} < \mathcal{N} >$ si l'intervention initie un dialogue. Il est constitué : d'une place x pour accueillir l'intervention suivante qui donnera lieu à une interaction ; d'une action positive $\overline{e_1}$ associée à l'énoncé constituant l'intervention ; d'un dessein $\mathcal{N}$ appartenant à la sémantique de l'énoncé e_1, notée e_1^*. Ce dessein, implicite lors de l'intervention, conditionne la poursuite de l'échange car il pose les limites d'acception du sens de l'énoncé par son locuteur.
- négatif : $e_0(x).x|\overline{e_1} < \mathcal{N} >$ si l'intervention suit une intervention précédente d'énoncé e_0.

[8]L'expression "glissement sémantique" ne renvoie pas ici à une notion théorique mais nous permet de décrire de façon imagée le passage de l'un à l'autre entre deux énoncés dont les significations se superposent mais ne se recouvrent pas entièrement.

L'intervention est ainsi construite afin d'interagir avec l'état courant de l'échange résultant de l'intervention précédente. Cet état courant est de la forme $y|\overline{e_0} < \mathcal{L} >$. En venant se substituer à y l'intervention crée une interaction qui se normalise en une étape en $\mathcal{L}|\overline{e_1} < \mathcal{N} >$. Cette interaction diverge ou bien amène à une forme normale $z|\overline{e} < \mathcal{H} >$ qui est le nouvel état courant.

Remarque : Les desseins $\mathcal{N}$ convoqués dans les interventions et qui, au moment de l'intervention sont implicites, peuvent être plus ou moins définis [9]. Ils peuvent être des variables lorsque les interventions sont absolument ouvertes (comme l'exemple des questions ouvertes du dialogue collaboratif 2.1.1.). Le déroulement de l'échange permet éventuellement d'expliciter la forme d'un tel dessein, comme dans le cas du dialogue divergent que nous étudions ci-dessous.

Pour se greffer sur une intervention précédente, un locuteur doit repérer dans le dessein qui lui correspond une chronique :

$$\overline{e_1} < e_2 \ldots \overline{e_n} < t > \cdots >$$

C'est-à-dire une ouverture sous la forme d'une variable t dans une chronique d'un dessein appartenant à la sémantique de e_1 et que le locuteur attribue à l'intervention de son interlocuteur. A partir d'une telle chronique, finissant sur une variable, le locuteur peut répondre :

$$e_1 \ldots \overline{e_2} < \ldots e_n \ldots \overline{e_{n+1}} < \mathcal{M} >> \text{ où } \mathcal{M} \in e^*_{n+1}$$

en espérant interagir sans diverger.

4.1. Un dialogue "divergent"

Nous avons déjà évoqué l'échange suivant qui illustre un des stratagèmes de Schopenhauer :
- e_1 : " Les anglais sont supérieurs à toutes les autres nations quant à l'art dramatique."
- e_2 : "Les anglais ne valent rien en musique, et donc sont nuls en opéra."

Ainsi, l'intervention I_1, matérialisée par l'énoncé e_1 (la phrase (2) de la section 3.2.) initiant un dialogue, peut être vue comme une action positive permettant d'entrer dans la sémantique de e_1.

$$I_1 = x_0|\overline{e_1} < \mathcal{N} >$$

Et la seule indication dont l'interlocuteur dispose est que $\mathcal{N} \in e^*_1$. Il peut alors construire sa réponse sous la forme d'une intervention I_2 :

$$I_2 = e_1(y).\mathcal{D}$$

qui reprend l'énoncé e_1 et tente de choisir un dessein $\mathcal{D}$ qui appartienne à $(e^*_1)^\perp$ de sorte que l'interaction qui consister à effectuer $I_1[I_2/x_0]$ ne diverge pas.
Dans le cas qui nous occupe, l'intervention I_2 est constitué d'un énoncé e_2 (la phrase (c) de la section 3.2.). Nous noterons cet énoncé e_{opera} plutôt que e_2, pour pointer que cet énoncé décline l'art dramatique en opéra sans donner plus de précision sur la forme sémantique de cet énoncé. Le dessein $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$\mathcal{D} = y|\overline{e_{opera}} < \mathcal{M} >$$

La normalisation de $I_1[I_2/x_0]$ donne en une étape le dessein suivant :

$$\mathcal{D}[\mathcal{N}/y] = \mathcal{N}|\overline{e_{opera}} < \mathcal{M} >$$

Or le dessein $\mathcal{N}$ choisi dans la sémantique e^*_1 de e_1, lors de l'intervention I_1 est de la forme $e_{comedie}(z).P_z + e_{tragedie}(u).P_u$, ainsi que nous l'apprend la suite de l'échange dialogique. De ce fait, puisque les actions négatives ($e_{tragedie}$ et $e_{comedie}$) ne correspondent pas à l'action positive proposée (e_{opera}), l'interaction $I_1[I_2/x_0]$ diverge dès la deuxième étape.

[9] En fait, c'est plutôt un ensemble de desseins d'une certaine forme dont il s'agit,

4.2. La pétition de principe

Une "pétition de principe" est un raisonnement fallacieux dans lequel la proposition qui doit être prouvée est supposée implicitement ou explicitement dans les prémisses. Nous caractérisons un tel sophisme en Ludique par un bloc fermé à l'interaction, c'est-à-dire une intervention représentée par un dessein ne présentant aucune ouverture disponible à partir de laquelle l'interlocuteur pourrait insérer une réponse et poursuivre le dialogue.
Exemple :
- e_0 : *Qu'est ce qui fait que ma fille est muette ?*
- e_1 : *Elle a perdu l'usage de la parole*

Suivant la formalisation du dialogue que nous venons de définir, nous associons à l'intervention "(votre fille est muette parce qu')elle a perdu l'usage de la parole", le dessein $\mathcal{I}$ suivant :

$$\mathcal{I} = e_0(y).y||\overline{e_1} < \mathcal{N} >$$

où le dessein $\mathcal{N}$ appartient à la sémantique de l'énoncé e_1.

Remarquons que, puisque les phrases e_1 : *votre fille a perdu l'usage de la parole* et e_2 : *votre fille est muette* sont sémantiquement très proches, les ensembles de desseins qui leur sont associés possèdent vraisemblablement des desseins de forme très semblables. Et le dessein $\mathcal{I}$ ci-dessus peut être considéré comme appartenant à la sémantique de e_2 (il est avancé comme justification de e_2). La pétition de principe repose alors sur le fait de choisir pour $\mathcal{N}$ le dessein suivant, c'est-à-dire le dessein I lui-même, à ceci près que les énoncés e_1 et e_2 y sont échangés :

$$\mathcal{N} = e'_0(x).x||\overline{e_2} < \mathcal{I} >$$

où e'_0 est l'énoncé *qu'est-ce qui fait que ma fille a perdu l'usage de la parole ?* et le dessein qui doit appartenir à la sémantique de e_2 peut encore être choisi égal à I.
Finalement le dessein associé à l'énoncé : *(votre fille est muette parce qu')elle a perdu l'usage de la parole* est le dessein infini suivant, récursivement défini :

$$e_0(y).y||\overline{e_1} < e'_0(z).z||\overline{e_2} < e_0(x).x||\overline{e_1} < e'_0(t).t||\overline{e_2} < \cdots >>>$$

La pétition de principe repose bien sur une utilisation abusive de la proximité entre les sémantiques de e_1 et e_2 et il s'agit bien d'un bloc fermé à l'interaction, puisque l'interlocuteur ne peut y repérer une chronique se terminant par une variable.

5. Conclusion

La ludique, inventée par J-Y. Girard pour permettre de reconstruire la logique sur une base "naturelle"[10] donne un cadre pour représenter les phénomènes de dialogue et d'interaction dans la langue. Parce qu'elle se situe d'emblée à un niveau de fondation très profond (on connaît la classification établie par Girard entre les niveaux -1, -2, -3, la ludique est alors au niveau "-3", les formules et valeurs de vérité étant au niveau -1 et les catégories au niveau -2), elle rompt avec la démarche habituelle en sémantique formelle héritée principalement de Frege, via Montague, d'associer aux énoncés des formules prétendant représenter le sens dont on ne sait trop d'où elles viennent. La gageure est bien sûr de devoir partir de peu d'éléments pour pouvoir reconstruire

[10] En quoi d'ailleurs elle est une réponse à tous les essais malheureux de logique dite "naturelle" tentés dans le passé.

ce qui tient lieu des formules et des preuves que nous avions dans la théorie classique. Dans cet article, nous avons fait confiance à une notion de "dialogue bien formé" afin d'établir les discriminations sémantiques qui nous semblaient nécessaires. Après tout, cette confiance n'est certainement pas plus risquée que ne l'est l'intuition du sens d'une phrase représenté par une formule, elle l'est même sans doute moins dans la mesure où nous avons, semble-t-il, des jugements assez sûrs sur la bonne formation des dialogues, que nous n'avons pas toujours sur la manière d'associer des quantificateurs et des connecteurs à une phrase donnée[11]. Par ailleurs, la sémantique formelle classique achoppe sur de nombreux problèmes concernant les quantifieurs. Dire *les Français ont voté pour X* n'est pas dire que *tous* les Français ont voté dans ce sens. L'emploi des génériques ne se ramène pas à la quantification universelle : *les chiens aboient* n'est pas remis en question par l'existence d'un canidé aphone, voire d'un chien qui miaule. Dans un intéressant débat autour de N. Chomsky, James Higginbotham ([11]) dit :

> Dogs bark, cats meow, fire burns, and so forth. From the point of view of the full understanding, as we work up our system of the world, they are in fact extremely complicated, these generic sentences. And I do agree with the critical comment, made by Nick Asher among others, that the fashionable use of a made up "generic quantifier" for the purpose of giving them an interpretation is not an advance. Rather, what you have to do is take *dogs bark* (if x is a dog, x barks), and you have to delimit through our understanding of the world what it is that will count as a principled objection to *dogs bark*, and what it is that will count as simply an exception.

Nous pensons que notre approche répond au moins partiellement à cette remarque. La signification d'un énoncé n'est pas que "compositionnelle", elle lui vient aussi de sa capacité d'interaction avec d'autres énoncés, qui peuvent être des négations, des questions ou de manière générale des demandes de justifications.
Penser les phénomènes de langage à partir de la notion d'interaction dans le cadre ludique ouvre ainsi une nouvelle voie à la sémantique, sans doute plus empirique que la sémantique formelle classique (montagovienne principalement). Cela peut paraître paradoxal si on considère la ludique comme ayant un niveau d'abstraction élevé. Mais n'est-ce pas tout simplement que si un peu de théorie nous éloigne du concret, beaucoup de théorie nous y ramène ?

Comme l'a fait remarquer un relecteur de ce texte – que nous remercions – la démarche que nous avons exposée ici entre en résonance avec les positions d'un Richard Brandom [2] en ce qui concerne la philosophie du langage, autrement dit avec une conception « inférentialiste » de la signification, que nous assumons. Une telle conception étend et approfondit les suggestions déjà faites par le second Wittgenstein et par les philosophes pragmatistes américains, dont C. S. Peirce. Elle repose sur une conception du sens qui, loin d'être déterminé par un rapport prétendument direct entre le langage et la réalité (exprimé par la notion de « tableau » chez le premier Wittgenstein), passe par les procédures internalistes de construction de la signification. Cette conception de la sémantique est très différente de celle qui est en vigueur dans la sémantique formelle classique.

Remerciements Nous remercions les relecteurs anonymes dont les remarques nous ont aidés à améliorer ce texte.

[11] Il suffit pour s'en rendre compte d'avoir tenté un jour d'enseigner la logique des prédicats à un public "naïf" !

Références

[1] J.-M. Andréoli *Logic Programming with Focusing Proofs in Linear Logic*, The Journal of Logic and Computation, 2, 3, pp. 297-347, 1992,

[2] R. Brandom *L'articulation des raisons*, trad. C. Tiercelin et J.-P. Cometti, Coll. Passages, ed. du Cerf, Paris 2009.

[3] Pierre-Louis Curien *Introduction to linear logic and ludics, part I and II*, to appear, downloadable from http ://www.pps.jussieu.fr/ curien/LL-ludintroI.pdf,

[4] O. Ducrot, *Le dire et le dit*, Editions de Minuit, Paris, 1984.

[5] Faggian, C. (2002) *On the dynamics of Ludics. A study of Interaction*, PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II.

[6] M.-R. Fleury, M. Quatrini *First order in Ludics* Mathematical Structures in Computer Science 14,no 2, 189–213,

[7] M.-R. Fleury, S. Tronçon : *Ludics as a frame for the formalisation of speech acts*, Actes de PRELUDE, , à paraître, Springer, LNCS, LNAI-Folli

[8] J.-Y. Girard *Linear Logic* TCS 1985

[9] J.-Y. Girard *Locus Solum* Mathematical Structures in Computer Science 11, pp. 301-506, 2001,

[10] J.-Y. Girard *From Foundations to Ludics* Bulletin of Symbolic Logic 09, pp. 131-168, 2003,

[11] J. Higginbotham *Two interfaces* in Piatelli-Palmarini, Uriagereka, Salaburu eds. *Of Minds and Languages, A dialogue with Noam Chomsky in the Basque Country*, Oxford University Press, 2009.

[12] J. Hintikka, J. Kulas *The Game of Language : Studies in Game Theoretical Semantics and its Applications*, D. Reidel, 1983,

[13] J. Hintikka, G. Sandu *Game Theoretical Semantics*, in J. Van Benthem and A. ter Meulen *Handbook of Logic and Language*, chap. 6, Elsevier, 1997,

[14] Joinet, J.-B. (2007) *Logique et Interaction*, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7.

[15] Livet P. *Speech acts in Ludics : reacting to breakdowns of interaction* Actes de PRELUDE, , à paraître, Springer, LNCS, LNAI-Folli.

[16] Lecomte, A. *Vers une pragmatique théorique*, Note d'intention à l'origine du projet "Prélude", http ://anr-prelude.fr/article16.html

[17] Lecomte A. et Quatrini M. *Ludics and its applications to Natural Language Semantics*, proceedings of Wollic 09, Tokyo, Japan, (Workshop on Logic, Language, Information and Computation), Springer, LNAI n° 5514, pp 242-256, 2009,

[18] S. Pinker *The Stuff of Thought, Language as a Window into the Human Nature*, Penguin Books, 2007.

[19] A. Schopenhauer, *The Art of Always Being Right*, Gibson Square Books Limited, 2004.

[20] K.Terui, *Computational Ludics*, to appear in Theoretical Computer Science, J.-Y.Girard's Festschrift special issue, 2008.

[21] S. Tronçon *Dynamique des démonstrations et théorie de l'interaction*, PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2006,

6. Annexe : une brève présentation de la Ludique

La Ludique est une théorie de la Logique récemment introduite par J.-Y. Girard [9]. Nous en proposons ci-dessous une présentation rapide et quelque peu reconstruite qui nous permet d'introduire directement et sous différentes facettes, les objets que nous utilisons dans ce papier.

6.1. Logique Linéaire Hyper Séquentialisée

Les *desseins* sont les objets principaux de la Ludique. En première approche, les desseins ressemblent aux preuves. En fait, ils résultent d'une étude approfondie des preuves et leurs interactions. La possibilité de décomposer les preuves de Logique Linéaire en blocs de règles de même polarité (positives dans le cas des règles $\otimes$ et $\oplus$; négatives dans le cas des règles $\&$ et $\wp$) a été découverte au début des années 90 [1]. Ceci a permis de développer un calcul des séquents linéaire polarisé et focalisé. Dans un tel cadre, les blocs de règles de même polarité peuvent être effectués en un unique pas, comme un connecteur synthétique, qui à partir d'un nombre fini quelconque de prémisses d'une même polarité donnée, construit une formule utilisant une combinaison quelconque des connecteurs de polarité opposée.
Nous illustrons ci-dessous cette possibilité en présentant un calcul des séquents linéaire hyper séquentialisé, sans exponentielles, qui préfigure une version "logique traditionnelle" de la Ludique.

6.1.1. Formules et Séquents

Les formules étant polarisées, la présentation du calcul peut être simplifiée en ne gardant que les formules positives, la négation linéaire permettant de retrouver les formules négatives.

- Les formules linéaires apparaissant dans le calcul des séquents sont construites à partir d'un ensemble de variables propositionnelles positives et notées P et des constantes linéaires, selon le schéma suivant :

  $$F = O|1|P|(F^{\perp} \otimes \cdots \otimes F^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (F^{\perp} \otimes \cdots \otimes F^{\perp})|$$

  Remarques :
  - Les connecteurs de conjonction et disjonction positive généralisés à une arité quelconque finie et supérieure à 2 sont encore notés $\otimes$ et $\oplus$. Dans le cas unaire de la conjonction on notera $\downarrow F^{\perp}$.
  - La négation linéaire, bien connue sur les connecteurs $\otimes$ et $\oplus$, s'étend aux connecteurs synthétiques :
  $((A_{11}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{1n_1}^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (A_{p1}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{pn_p}^{\perp}))^{\perp} = A_{11} \wp \ldots \wp A_{1n_1}) \& \ldots \& (A_{p1} \wp \ldots \wp A_{pn_p})$.
  On utilise également les notations suivantes :
  $0^{\perp} = T$, $1^{\perp} = \perp$.
- Les séquents sont de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Δ est un multi-ensemble de formules et Γ contient au plus une formule. Γ et Δ ne contiennent que des formules positives.

6.1.2. Les règles

– Il y a trois axiomes :

$$\overline{P \vdash P, \Delta} \qquad \overline{\vdash 1, \Delta} \qquad \overline{O \vdash \Delta}$$

– Seulement deux règles logiques :

$$\frac{\vdash A_{11}, \ldots, A_{1n_1}, \Gamma \quad \ldots \quad \vdash A_{p1}, \ldots, A_{pn_p}, \Gamma}{(A_{11}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{1n_1}^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (A_{p1}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{pn_p}^{\perp}) \vdash \Gamma}$$

$$\frac{A_{i1} \vdash \Gamma_1 \quad \ldots A_{in_i} \vdash \Gamma_p}{\vdash (A_{11}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{1n_1}^{\perp}) \oplus \cdots \oplus (A_{p1}^{\perp} \otimes \cdots \otimes A_{pn_p}^{\perp}), \Gamma}$$

où $\cup \Gamma_k \subset \Gamma$[12] et, pour $k, l \in \{1, \ldots p\}$, $\Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$.

– Et une règle de coupure :

$$\frac{A \vdash B, \Delta \qquad B \vdash \Gamma}{A \vdash \Delta, \Gamma}$$

6.1.3. Remarques sur le "décalage"

Utiliser le décalage est une façon de casser un bloc de polarité donné. il est possible de séparer des étapes de décomposition logique à l'aide des opérateurs de décalage $\downarrow$ (resp. $\uparrow$) qui changent la polarité négative (resp. positive) en la positive (resp. négative). Les règles introduisant de telles formules sdécalées sont les suivantes :

$$\frac{A^{\perp} \vdash \Gamma}{\vdash \downarrow A, \Gamma} [+] \qquad\qquad \frac{\vdash A^{\perp}, \Gamma}{\downarrow A \vdash \Gamma} [-]$$

où A est une formule négative (la négation d'une formule positive).

Exemple Dans un bloc tel que $A \otimes B \otimes C$, A, B et C sont en principe négatives, mais si on ne veut pas traiter A, B, C simultanément, on peut changer la polarité de $B \otimes C$ (qui est positive) et la rendre négative à l'aide de $\uparrow$.. On écrit alors $A \otimes \uparrow (B \otimes C)$.
Comparons les deux preuves suivantes, où (1) n'utilise pas le décalage alors que (2) l'utilise :

plutôt que (1) : $\dfrac{A^{\perp} \vdash \quad B^{\perp} \vdash \quad C^{\perp} \vdash}{\vdash A \otimes B \otimes C}$ on obtient (2) : $\dfrac{A^{\perp} \vdash \quad \dfrac{\dfrac{B^{\perp} \vdash \quad C^{\perp} \vdash}{\vdash B \otimes C}}{\downarrow (B \otimes C)^{\perp} \vdash}}{\vdash A \otimes \uparrow (B \otimes C)}$

6.2. Une nouvelle théorie logique

L'alternance de pas de polarité opposée est propice à considérer l'interaction (la coupure) comme une confrontation : la tentative de prouver un énoncé ($\vdash A$), confrontée à la tentative de prouver la négation de cet énoncé ($\vdash \neg A$ ou $A \vdash$). Il est alors aisé d'interpréter une telle interaction en terme de jeux et les preuves par des stratégies.
Lorsqu'on oppose deux telles stratégies (tentatives de preuve) l'une contre l'autre, au plus l'une d'entre elles peut être effectivement une preuve. On attend, au minimum, qu'une preuve "gagne" la confrontation. Mais qu'est ce que gagner une confrontation, et d'ailleurs comment une telle confrontation peut-elle se terminer ? Et comment manipuler de tels objets, que l'on peut appeler *parapreuves*, susceptibles d'entrer en interaction avec des preuves sans en être ?
Le prototype de ces objets est la parapreuve suivante :

$$\frac{}{\vdash \Gamma} \dagger$$

où Γ est un multi-ensemble de formules positives, éventuellement vide, et $\dagger$ est une règle positive particulière appelée *Daïmon*, dont la présence permettra de clôre une interaction. Ce que l'on peut comprendre, filant encore la métaphore des jeux (ou de la recherche de preuve), comme le

[12] La possibilité que $\cup_k \Gamma_k$ soit strictement contenue dans Γ permet de retrouver l'affaiblissement.

fait de reconnaître son échec, c'est à dire d'abandonner et laisser l'adversaire gagner.

Pour arriver à la Ludique proprement dite, il est nécessaire d'effectuer un pas supplémentaire d'abstraction. Non seulement, comme nous venons de le voir, la Ludique ne définit pas les preuves a priori, mais des objets plus généraux dont les preuves seront des cas particuliers, qui émergeront à partir des bonnes propriétés relativement à l'interaction (et en particulier le fait de ne pas jouer le Daïmon), mais la Ludique ne pose pas non plus que les formules sont définies a priori. La notion pertinente, qui permet aux objets d'entrer en interaction est celle de *lieu*, d'adresses en termes informatiques. Ces lieux sont manipulés comme des suites d'entiers ; on ne manipule plus alors des séquents de formules mais des séquents de lieux qui sont les briques de base avec lesquelles sont représentés les desseins.

Definition : *Un* dessin *(une représentation d'un dessein) est un arbre de séquents de lieux* $\Gamma \vdash \Delta$ *(où* Γ *contient au plus un lieu), construit à l'aide des trois règles suivantes :*

- **Daïmon**

$$\frac{}{\vdash \Delta}\ \dagger$$

- **Positive rule**

$$\frac{\cdots \qquad \xi.i \vdash \Delta_i \qquad \cdots}{\vdash \Delta, \xi}\ (\xi, I)$$

où I un ensemble fini d'entiers peut être vide et où, pour tout $i, j \in I$ $(i \neq j)$, Δ_i et Δ_j sont disjoints et tous les Δ_i sont contenus dans Δ.

- **Negative rule**

$$\frac{\cdots \qquad \vdash \xi.I, \Delta_I \qquad \cdots}{\xi \vdash \Delta}\ (\xi, \mathcal{N})$$

où $\mathcal{N}$ est une ensemble quelconque d'ensembles finis d'entiers I et Δ_I est inclu dans Δ.

On interprète une règle positive comme un choix positif fait par un joueur : il s'agit de choisir une adresse parmi celles disponible (le *focus*), puis choisir parmi plusieurs alternatives (comme lorsqu'on utilise une règle $\oplus$) la façon de décomposer cette adresse et enfin la forme de cette décomposition (comme dans une règle $\otimes$), c'est à dire les poursuites de l'interaction simultanément accessibles (on choisit une *ramification*).

Symétriquement, la règle négative est interprétée de façon passive : le focus est imposé ; il est associé à cette règle négative tout un ensemble de ramifications, lequel doit contenir celle choisie par l'autre joueur pour que l'interaction se passe bien (comme nous allons le voir ci-dessous). Dans notre lecture *rhétorique* c'est comme si le joueur, après avoir fait une assertion (pas positif) s'attendait à un ensemble de réactions possibles de son adversaire. En terme de preuves, après avoir choisi un des termes d'une disjonction et avoir déployé les formules qui le constitue conjointement, le "prouveur" prédit les objections que pourrait avancer le "contre-prouver" et est en mesure de les disqualifier (en poursuivant le dessein) afin de valider sa preuve.

En terme de jeux, les desseins ainsi construits peuvent être interprétés comme des stratégies dans un jeu dont le but est d'éviter d'avoir à jouer le daïmon.

Nous arrivons enfin à la notion de *dessein* proprement dite : un dessein de base $\Gamma \vdash \Delta$ est un ensemble de chroniques (un ensemble de parties), c'est à dire de suites alternée d'actions (ϵ, ξ, I), où ϵ est une polarité, ξ un lieu, et I une ramification, telles que si $\epsilon = +$, le focus appartient à Δ ou bien a été cré par une action négative précédente et si $\epsilon = -$, le lieu appartient à Γ ou bien a été crée par une action positive immédiatement précédente . Un tel ensemble de chroniques , sera en effet un dessein, lorsque il est clos par sous-chroniques ; lorsque les chroniques qui le constituent sont cohérentes (elles divergent sur des actions négatives) ; lorsque les chroniques maximales se terminent sur des actions positives et enfin, s'il est de base positive, cet ensemble de chroniques est non vide.

6.2.1. *Interaction*

L'interaction est la coïncidence de deux lieux en position duale dans la base de deux desseins (respectivement de base $\Gamma \vdash \Delta, \xi$ et $\xi \vdash \Sigma$), ce qui correspond à une coupure dans le cas des preuves. Cette interaction crée une dynamique de réécriture du réseau constitué de deux desseins, en vue d'obtenir un dessein de base $\Gamma \vdash \Delta, \Sigma$, résultat de l'interaction. Le processus appelé, comme d'habitude *normalisation*, peut être résumé comme suit : le lien de coupure ou interaction est dupliqué et propagé sur tous les sous-lieux immédiats des lieux successifs de l'interaction, aussi longtemps que l'action positive focalisant sur le lieu courant de l'interaction correspond à l'action négative miroir. Ce processus se termine soit lorsque l'action positive courante est un daïmon et dans ce cas on dit qu'il *converge*, soit parce qu'on ne trouve pas l'action négative miroir d'une action positive et dans ce cas l'interaction *diverge*. Le processus peut aussi ne pas terminer puisque les desseins ne sont pas forcément finis.
Lorsque la normalisation entre deux desseins $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ (respectivement basés sur $\vdash \xi$ et $\xi \vdash$) converge, ces desseins sont dits *orthogonaux*, on note : $\mathcal{D} \perp \mathcal{E}$. Dans ce cas le résultat de la normalisation est le dessein suivant :

$$\frac{}{\vdash}\dagger$$

Soit $\mathcal{D}$ un dessein, on note $\mathcal{D}^\perp$ l'ensemble de tous les desseins qui lui sont orthogonaux. Il est alors possible de comparer deux desseins relativement à leurs contre-desseins. En outre, le théorème de séparation [9] assure qu'un dessein est exactement défini par ses orthogonaux : si $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{E}^\perp$ alors $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

6.2.2. *Comportements*

Au terme de cette "déconstruction" qui a permis de pointer les éléments primitifs de l'nteraction, on retrouve la Logique.

- Les *formules* sont certains ensembles de desseins. Ceux qui sont clos (stable) par interaction, c'est à dire ceux qui sont égaux à leur *bi-orthogonal*. Ces ensembles sont appelés *comportements*.
- On retrouve alors les connecteurs de la Logique Linéaire avec la très intéressante propriété de *complétude interne*. C'est à dire que la clôture de l'opération correspondant au connecteur est superflue. Par exemple, un dessein de $\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ est soit un dessein de $\mathbf{C}$ ou un dessein de $\mathbf{D}$ ($(\mathbf{C} \cup \mathbf{D})^{\perp\perp} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$).
- Finalement les *preuves* seront les desseins satisfaisant certaines propriétés, en particulier celle de ne pas utiliser le daïmon.

6.3. Les c-desseins

Dans [20] K. Terui propos une formulation alternative des desseins de la Ludique, motivée par le développement d'une théorie du calcul et de la complexité qui soit "moniste, logique et interactive". Pour réaliser un tel programme, K. Terui modifie et étend le formalisme de la Ludique.
Nous décrivons ci-dessous, de façon très simplifiée, les notions de c-desseins et de générateurs que nous utilisons dans notre texte.

6.3.1. *c-Desseins*

Parmi les caractéristiques des c-designs comparés aux desseins originaux de Girard, nous soulignons les suivantes :

– Plutôt que des adresses absolues les c-desseins peuvent être décrits comme les éléments d'un calcul de termes (à l'instar du λ-calcul). La notion d'adresse absolue est alors remplacée par celle de variables liées.
– Les c-desseins, à la différences des desseins originaux de Girard, contiennent des coupures explicites.

Les c-desseins peuvent toujours être vus comme des suites alternées d'actions, avec toutefois une notion d'action légèrement modifiée. Les c-desseins sont définis à partir d'une *signature*, c'est à dire un ensemble $\mathcal{A}$ de couples (a,n) où a est un nom et n son arité. Les actions positives sont soit des constantes : † (daïmon ou abandon) et Ω (divergence ou absence de règle positive), soit des actions propres (dénotée par $\overline{a}$ pour un nom donné a) alors que les actions négatives sont soit des variables (x, y, z,...) ou des actions négatives propres (dénotées $a(x_1,...,x_n)$).
Précisément les termes ou c-desseins sont co-inductivement définis :

– Les c-desseins positifs sont : $P = \quad \Omega \quad | \quad \dagger \quad | \quad N_0||\overline{a} < N_1,\ldots,N_n >$
– Les c-desseins négatifs sont : $N = \quad x \quad | \quad \Sigma_{a\in\mathcal{A}} a(\vec{x}).P_a$

Les coupures apparaissent explicitement dans les c-desseins sous la forme $N_0||\overline{a} < N_1,\ldots,N_n >$ lorsque N_0 n'est pas une variable. Ces coupures sont l'équivalent de l'application dans un λ-calcul, sauf que nous ne disposons pas d'une unique application $((\lambda x.P).N$ qui se réduit en $P[N/x])$ mais d'autant d'applications que d'éléments dans la signature $\mathcal{A}$. En effet, N_0, qui n'est pas une variable, est de la forme $\Sigma_{a\in\mathcal{A}} a(\vec{x}).P_a$ et lorsque N_0 contient effectivement un sous-teme $a(\vec{x}_a).P_a$ alors l'application est matérialisée par la présence de la même action a, de par et d'autre du symbole de coupure $||$ et s'écrit $a(x_1,\ldots,x_n).\mathcal{P}_a||\overline{a} < \mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n >$ et se réduit en un pas en le terme $\mathcal{P}_a[\mathcal{N}_1/x_1,\ldots,\mathcal{N}_n/x_n]$). Dans le cas où il n'y a pas de tel sous-terme $a(\vec{x}_a).P_a$ (ou de façon équivalent lorsque le sous-terme est $a(\vec{x}_a).\Omega$ l'interaction diverge.
Lorsque dans tous les sous-desseins de la forme $N_0||\overline{a} < N_1,\ldots,N_n >$ N_0 est une variable, le c-dessein est dit sans coupure.
Exemples : On se donne un lexique A contenant les actions $\emptyset$, $\uparrow$ et $\otimes$ respectivement d'arité 0, 1 et 2 :

1. le c dessein $\Sigma_{a\in A} a(\vec{y}).\Omega$ correspond à l'axiome $\dfrac{}{0\vdash}$ de la logique linaire hyperséquentialisée ;
2. le c-dessein $z||\overline{\emptyset}$ correspond à l'axiome $\dfrac{}{\vdash 1}$;
3. le c-dessein $x||\overline{\otimes} < \Sigma_{a\in A} a(\vec{y}).\Omega, \uparrow(z).z||\overline{\emptyset} >$ correspond à la preuve suivante de la formule $T\otimes\uparrow 1$:

$$\dfrac{\dfrac{}{0\vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash 1}}{\downarrow 1^\perp \vdash}}{\vdash T\otimes\uparrow 1}$$

4. Le c-dessein ci-dessous, récursivement défini, correspond au $\mathcal{F}ax$:

$$Fax_y = \Sigma_{a\in\mathcal{A}} a(x_1,\ldots,x_n).(y||\overline{a} < Fax_{x_1},\ldots,Fax_{x_n} >)$$

6.3.2. *Générateurs*

La notion de *générateur*, introduite dans [20] permet de décrire de façon finie les c-desseins infinis.

Un **générateur** est un triple (S^+,S^-,l) où S^+ et S^- sont des ensembles disjoints d'états et l est une fonction définie sur $S = S^+ \cup S^-$ satisfaisant : :

– Pour $s^+ \in S^+$, $l(s^+)$ est soit Ω, $\dagger$ ou une expression de la forme $s_0^- || \overline{a} < s_1^-, \ldots, s_n^- >$ telle que les s_i^- appartienent à S^-.
– Pour $s^- \in S^-$, $l(s^-)$ est soit une variable x, ou une expression de la forme $\Sigma_{a \in \mathcal{A}} a(\vec{x}).s_a^+$ telle que les s_a^+ appartiennent à S^+.

Un **générateur pointé** est un quadruple (S^+, S^-, l, s_I) où (S^+, S^-, l) est un générateur $s_I \in S$.
On dira que (S^+, S^-, l, s_I) engendre un c-dessein appelé dessein-(S^+, S^-, l, s_I).

Un c-dessein D est **finiment engendré** s'il est engendré par un générateur pointé qui a un nombre fini d'états et chaque fois que $l(s^-) = \Sigma_{a \in \mathcal{A}} a(\vec{x}).s_a$, tseulement un nombre fini de s_a sont distincts de Ω.

Exemples :
- le générateur pointé $(\{s_\dagger\}, \{s\}, l, s_\dagger)$, avec : $l(s_\dagger) = \dagger$, $\quad l(s) = \Sigma_{a \in \mathcal{A}}.s_\dagger$ engendre le daïmon négatif : $\Sigma_{a \in \mathcal{A}}.\dagger$.
- le générateur pointé $(\{s_a\}_{a \in \mathcal{A}}, \{s_N\}, l, s_N)$ avec :

$$l(s_N) = \Sigma_{a \in \mathcal{A}}(\vec{x}_a).s_a \text{ et } l(s_a) = y||\overline{a} < s_N, \ldots, s_N > \text{ si } y \notin \vec{x}_a$$

engendre le $\mathcal{F}ax_y$.
Remarque : Si $\mathcal{A}$ est fini, Dai^- et$\mathcal{F}ax$ sont finiment engendrés.