. Grenoble, les 22-23 Juin 2006

Uniformité en Ludique

Marie-Renée FLEURY
IML (Institut de Mathématiques de Luminy)
Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II

Ludique et Logique : Uniformité

Vocabulaire

Logique et langue naturelle	**Logique mathématique**	**Ludique**
assertion	formule	comportement
argumentation	preuve	dessein

□ Quand dit-on qu'une assertion est argumentée ?

Lorsqu'elle peut résister à tous les contradicteurs

□ Rôle des "abandons" (†) dans les desseins :

un argument peut avoir des failles

si l'opposant perçoit la faille alors c'est lui qui gagne. (et réciproquement)

$\square$ **Exemple d'un dessein représentant un syllogisme :**

S'$\underbrace{\textit{il neige à Berlin,}}_{N}$ $\underbrace{\textit{il pleut à Paris}}_{P}$; il neige à Berlin, donc il pleut à Paris.

On obtient alors : $\vdash ((N \multimap P) \otimes N) \multimap P$ i.e. $\vdash (N \otimes P^{\perp}) \wp N^{\perp} \wp P$

ou pour se rapprocher de la ludique :

$(\vdash N \otimes \downarrow P^{\perp}) \wp \downarrow N^{\perp} \wp P$ i.e. $(\downarrow N^{\perp} \wp P) \otimes \downarrow N \otimes P^{\perp} \vdash$

Ce qui donne :

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad \downarrow N^{\perp} \vdash \downarrow N^{\perp}}{\vdash (\downarrow N \otimes P^{\perp}) \,,\, \downarrow N^{\perp} \,,\, P}}{(\downarrow N^{\perp} \wp P) \otimes \downarrow N \otimes P^{\perp} \vdash} \qquad \text{i.e.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax}{\xi 12 \vdash \xi 3} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}ax}{\xi 11 \vdash \xi 2}}{\vdash \xi 1 \,,\, \xi 2 \,,\, \xi 3} (\xi 1, \{1, 2\})}{\xi \vdash}$$

□ Retour à l'uniformité

Un argument uniforme est celui d'une personne "stable".

Ses réponses aux questions sont uniformes, (cohérentes)

Exemple :

Suzy ξ a des fiches, des dossiers à remplir $(\xi.I)$. I représente l'ensemble des questions de la fiche

$$\mathfrak{D} = \cfrac{\cfrac{\vdots}{\vdash \xi.J} \qquad \vdots \qquad \cfrac{\vdots}{\vdash \xi.I}}{\xi \vdash} \, (\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

$$\boxed{\text{Dessein } (\xi \vdash) \text{ uniforme} = \text{réponses de } \xi \text{ uniformes.}}$$

Exemple :

Si Suzy (ξ) est "stable" alors une même date sera notée sur chaque fiche (I) où on lui demande sa naissance.

Uniformité du second ordre

□ **Le second ordre** :
- des séquents de formules propositionnelles avec des atomes variables
- quantification universelle (existentielle) de ces atomes.

Exemple : $X \vdash X \oplus X$ $\qquad \vdash \forall X\ X$ $\qquad \vdash \forall A\, \forall B\, \forall C\ (A \multimap (B \multimap C))$

□ **Uniformité** : Ingrédient de base du théorème de "full completeness" : permet de gérer les séquents ayant des atomes dans le contexte.

□ **Théorème (full completeness)**(informel) : *Soit F une Π_1-formule de* $\mathbf{MALL_2}$. *Un "bon" dessein de $\mathbb{F}$ (comportement associé à F) de base $\vdash \xi$, correspond à une preuve de F in* $\mathbf{MALL_2}$

□ `Propriétés d'un "bon" dessein dans un comportement` $\mathbb{F}$ `?`

* pas d'abandon (†) ; * se terminer par des fax ; * être uniforme

□ `Preuve` : Pour un "bon" dessein, on peut retrouver la dernière règle et ainsi par induction reconstruire la preuve qu'il représente.

Exemple 1 : dessein $\mathfrak{F}$ de base $\xi \vdash \sigma, \tau$ dans $\mathbb{X} \vdash \mathbb{P}, \mathbb{Q}$

$$\mathfrak{F} = \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \xi.I, \sigma, \tau}\,(\sigma, K) \qquad \dfrac{\vdots}{\vdash \xi.J, \sigma, \tau}\,(\tau, L)}{\xi \vdash \sigma, \tau}\,(\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

$\square$ `A quelle condition ce dessein est-il uniforme ?`

□ **En langue naturelle**

3 personnes (sa mère Alice, sa copine Léa, sa soeur Lily) posent à Bob la question suivante : <u>"est-ce que tu fumes ?"</u>

Alice$_I$: ... ?	Léa$_J$: ... ?	Lily$_K$: ... ?
Bob$_\xi$: "non, jamais"	Bob$_\xi$: "oui, c'est super"	Bob$_\xi$: "non, jamais"
Alice$_K$: t'es sûr ?	Léa$_K$: t'es sûr ?	Lily$_K$: t'es sûr ?
Bob$_\xi$: oui	Bob$_\xi$: oui	Bob$_\xi$: "oui, quelquefois"

ξ représente les réponses possibles de Bob. Selon la personne qui l'interroge, Alice$_I$, Léa$_J$, Lily$_K$, Zoé$_L$, il ne répond pas la même chose.

`Les réponses 1 et 2 peuvent même être contradictoires.`
`L'ordre des réponses 1 et 2 peut aussi être significatif .`

En Ludique : Soit $\mathfrak{F}$ un dessein de $\mathbb{X} \vdash \mathbb{P}, \mathbb{Q}$ de base $\xi \vdash \sigma, \tau$.

Chaque fois que l'on coupera $\mathfrak{F}$ avec un dessein (partiel) de $\mathbb{X}$ nous devons obtenir la même preuve.

Soit $\mathbb{X} = \{\mathfrak{D}_I \ ; \ \mathfrak{D}_J\}^{\perp\perp}$ où $\quad \mathfrak{D}_I := \dfrac{\vdots}{\vdash \xi}\,(\xi, I) \quad$ et $\quad \mathfrak{D}_J = \dfrac{\vdots}{\vdash \xi}\,(\xi, J)$

Les formes normales de $[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_I]]$ et $[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_J]]$ sont :

$$\dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\vdots}{\sigma.i \vdash \tau} \qquad \cdots}{\vdash \sigma, \tau}\,(\sigma, K) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\vdots}{\tau.j \vdash \sigma} \qquad \cdots}{\vdash \sigma, \tau}\,(\tau, L)$$

$[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_I]]$ focalise en premier sur σ, et $[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_J]]$ sur τ.

Exemple 2 : dessein $\mathfrak{F}$ de base $\xi \vdash \sigma$ dans $\mathbb{X} \vdash \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$

Approche informelle :
Bob possède un appartement à Marseille et une maison à La Ciotat, plusieurs institutions (Impots, SS, Assurance, ...) lui demandent quelle est sa résidence principale (justificatifs à l'appui).

Selon l'organisme, sa réponse sera "Marseille" ou "La Ciotat".
Il peut même donner des preuves pour les deux : factures EDF, relevé de banque, ..

On peut dire que <u>Bob n'a pas de réponse uniforme</u>.

On considére que $\mathfrak{F}$ représente toutes les réponses possibles que donne Bob selon l'institution qui l'interroge.

Sa réponse "Marseille" ($\sigma.1$) sera dans $\mathbb{P}$, sa réponse "La Ciotat" ($\sigma.2$) sera dans $\mathbb{Q}$

$$\mathfrak{F} = \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma.1 \vdash \xi.I}}{\vdash \xi.I, \sigma}\,(\sigma,1) \qquad \cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma.2 \vdash \xi.J}}{\vdash \xi.J, \sigma}\,(\sigma,2)}{\xi \vdash \sigma}\,(\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

A quelle condition, ce dessein est-il uniforme ?

En Ludique : Coupons $\mathfrak{F}$ par les desseins (partiels) $\mathfrak{D}_I$ et $\mathfrak{D}_J \in \mathbb{X}$ pour obtenir un dessein de $\vdash \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$

$$[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_I]] = \dfrac{\dfrac{\vdots}{\sigma.1 \vdash}}{\vdash \sigma}(\sigma, 1) \in \mathbb{P} \qquad \text{et} \qquad [[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}_J]] = \dfrac{\dfrac{\vdots}{\sigma.2 \vdash}}{\vdash \sigma}(\sigma, 2) \in \mathbb{Q}$$

Impossible d'associer une preuve à $\mathfrak{F}$

Uniformité au 1er ordre

- Formule quantifiée universellement ($\forall x\ P(x)$) ou existentiellement ($\exists x\ P(x)$)

- Comportements associés à ces formules : $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ et $\oplus_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$
conjonction (resp. somme) infinie de comportements délocalisés.
$\mathbb{D}$ représente le domaine dénombrable d'interprétation des variables

Notations :

Un dessein matériel $\mathfrak{D}$ de $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ sera noté comme une famille $(\mathfrak{D}_d)_d$:

$$\frac{\mathfrak{D}_{d_i} \qquad \mathfrak{D}_{d_j} \qquad \mathfrak{D}_{d_k}}{<>\vdash}\{d/\ d\in\mathbb{D}\} \qquad \text{où } \mathfrak{D}_d \text{ est un dessein de } \mathbb{C}_d$$

Un $\mathfrak{D}$ dessein matériel de $\oplus_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ est un dessein de l'un des $\mathbb{C}_d$.

Qu'est-ce qu'un dessein uniforme dans $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ comportements associé à $\forall x\ P(x)$?

Idée intuitive :

$\mathfrak{D}$ dessein uniforme de $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ = dessein où tous les $\boxed{\mathfrak{D}_d \text{ se ressemblent.}}$

Une preuve de $\forall x\ P(x)$ $\neq$ arguments $\boxed{\text{"à la tête du client".}}$

$\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_d)_d \in \&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ `représentant une preuve de` $\forall x\ P(x)$
`ne doit pas dépendre aléatoirement de` d`, mais plutôt être`
`une` $\boxed{\texttt{famille de copies "mutatis mutandis"}}$ `d'un même dessein.`

Qu'est-ce qu'un dessein uniforme dans $\&_{d\in\mathbb{D}} \oplus_{e\in\mathbb{D}} \mathbb{C}_{d,e}$ (comportements associé à $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$)

Exemple informel: *Tout triangle isocèle possède un axe de symétrie*

Une argumentation uniforme de la phrase
$=$ une preuve de la formule $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$
$=$ un dessein uniforme du comportement $\&_{d\in\mathbb{D}} \oplus_{e\in\mathbb{D}} \mathbb{C}_{d,e}$)

`Le choix` de la droite Δ dépendant du triangle T dans une argumentation,
$=$ `le témoin` y en fonction de x dans une preuve π,
$=$ `le choix` de l'indice e en fonction de d, dans un dessein

`un choix uniforme = choix non aléatoire (par exemple, utilisation d'une fonction).`

Revenons à la Ludique : Exemples

- écrits en calcul des séquents de la logique linéaire générale,
- sans prendre en compte la polarité d'une formule
- avec transposition des preuves de ce calcul en terme de desseins de la ludique .

Premier exemple : Soit le sequent Σ: $\vdash \forall x\ [A(x) \otimes A(x) \multimap A(x) \otimes A(x)]$.

Il possède deux preuves non équivalentes : l'identité Id et l'échange Tr.

Soit $\mathfrak{M}$ le dessein de $\&_{d\in\mathbb{D}}\mathbb{C}_d$ représentant le séquent Σ.
$\mathfrak{D}_{d_1}$ est une délocalisation de $\mathfrak{I}d$ (un dessein représentant la preuve Id) et $\mathfrak{D}_{d_2}$ est une délocalisation de $\mathfrak{T}r$ (un dessein représentant la preuve Tr).

$$\mathfrak{M} = \quad \frac{\mathfrak{D}_{d_1} = \mathfrak{I}d \qquad \cdots \qquad \mathfrak{D}_{d_2} = \mathfrak{T}r}{\xi \vdash} \{d/\ d \in \mathbb{D}\}$$

Soit $\mathfrak{N}$ le dessein, où les φ_d sont des délocalisations disjointes.

$$\mathfrak{N} = \quad \frac{\mathfrak{E}_{d_1} = \varphi_{d_1}(\mathfrak{I}d) \qquad \cdots \qquad \mathfrak{E}_{d_2} = \varphi_{d_2}(\mathfrak{I}d)}{\xi \vdash} \{d/ \quad d \in \mathbb{D}\}$$

$\mathfrak{M}$ `sera disqualifié comme représentant d'une preuve de` Σ

$\mathfrak{N}$ `sera un "bon" candidat.`

Deuxième exemple : $\Sigma \vdash \forall x\ \exists y\ (R(x) \multimap R(y))$ où R est une variable de prédicat.

Soit λ une preuve de $\vdash R(x) \multimap R(x)$ et π la preuve de Σ utilisant λ :

$$\lambda = \quad \dfrac{\dfrac{R(x) \vdash R(x)}{\vdash R(x)^{\perp},\ R(x)}}{\vdash R(x) \multimap R(x)} \qquad \pi = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\lambda}{\vdash R(x) \multimap R(x)}}{\vdash \exists y\ (R(x) \multimap R(y))}}{\vdash \forall x\ \exists y\ (R(x) \multimap R(y))}$$

Soit $\mathfrak{D}$ un dessein dans $\downarrow \mathbb{R}^{\perp} \wp \mathbb{R}$ représentant la preuve λ.

Soit $(\mathfrak{D}_d)_d$ le dessein de $\&_{d\in\mathbb{D}} \oplus_{e\in\mathbb{D}} \mathbb{C}_{d,e}$ où pour tout d, $\mathfrak{D}_d$ est une délocalisation de $\mathfrak{D}$ dans $\mathbb{C}_{d,d} = \downarrow \mathbb{R}^{\perp} \wp \mathbb{R}$.

Ce dessein sera qualifié d'`uniforme` car dans "chaque branche" d le choix de e est fait uniformément (on choisit toujours $e = d$).

Un pas vers la définition précise de l'uniformité

Soit $\mathfrak{F}$ un dessein de base $\xi \vdash \sigma$ appartenant à $\mathbb{X} \vdash \mathbb{P}$ pour tout $\mathbb{X}$.

Sa première règle est : $(\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$, $[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}]]$ car pour tout comportement $\mathbb{X}$, pour tous les $\mathfrak{D}$ possibles dans $\mathbb{X}$, $[[\mathfrak{F}, \mathfrak{D}]]$ doit converger.

Rôle de l' uniformité : imposer que quelque soit le I choisi, la preuve "`continue de la même façon`".

$\Rightarrow$ nécessité de séparer les desseins selon leur réaction avec ceux du comportement orthogonal.

Impossible : `Il n'y a pas assez de monde dans l'orthogonal.`

Solution pour avoir une distinction plus fine : considérer un univers plus large, les **desseins partiels**, muni d'une relation d'équivalence.

On peut alors exprimer le fait que tous les desseins partiels

$$\dfrac{\vdots}{\xi \vdash \sigma}\,(\xi, \{I\}) \quad \text{inclus dans} \quad \dfrac{\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots}{\xi \vdash \sigma}\,(\xi, \mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

conduisent à la même preuve.

Exemple typique d'un dessein partiel : *une tranche (slice)* of a design $\mathfrak{D}$ (on sélectionne une seule branche dans toutes les règles négatives).

Exemple extrême : la "foi" $\mathfrak{F}id$ et le $Skunk$.

Rôle de la **relation d'équivalence partielle** (i.e. non reflexive) sur $\mathbb{G}^p$:

- elle sépare les desseins partiels relativement à la normalisation.
- Les réseaux se normalisant en $\mathfrak{D}ai$ `contre` ceux qui se normalisent en $\mathfrak{F}id$.

Relations d'équivalence sur les comportements composés :

□ Doivent conserver les propriétés des connecteurs.

□ Exemple : Sur le comportement $\mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$ ($\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ distincts) , la relation d'équivalence se fera composante par composante.

Définition : Un dessein $\mathfrak{D}$ est dit `uniforme` s'il est équivalent à lui-même.
C'est alors un candidat pour être une preuve.

Rappels :

$$\mathfrak{D}ai_\sigma^+ = \frac{}{\vdash \sigma}\,\dagger \qquad \mathfrak{F}id = \frac{}{\vdash \tau}\,(\emptyset) \qquad \mathfrak{S}k_\tau = \frac{}{\tau \vdash}\,(\tau, \emptyset)$$

Uniformité du 1er ordre et Ludique

Problème : Prendre en compte la spécificité du 1er ordre : les variables du 1er ordre s'interprètent dans des domaines $\mathbb{D}$.

Solution proposée :

- Indexation des biais (et ....) par les éléments d'un domaine $\mathbb{D}$.

- le pb est traité au 1er ordre de façon non interactive.

- L'interactivité réapparaît lorsque l'on mixte les deux (1er et sd ordre)

- la priorité est toujours donnée à la focalisation et à la localisation.

- Les éléments du domaine (les $d \in \mathbb{D}$) servent uniquement d'indice pour classifier les lieux.

1- Desseins relatifs à une preuve de : $\forall x\ [A(x) \multimap A(x) \oplus C(x)]$**.**

Préliminaire : Preuve π de $[A \multimap A \oplus C]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash \downarrow A^{\perp}\ ;\ \downarrow A}}{\vdash \downarrow A^{\perp}\ ;\ (\downarrow A \oplus C)}}{\vdash \downarrow A^{\perp} \wp (\downarrow A \oplus C)} \quad \text{ou par focalisation} \quad \dfrac{\dfrac{\downarrow A \vdash \downarrow A}{\vdash \downarrow A^{\perp}\ ;\ (\downarrow A \oplus C)}}{[\downarrow A^{\perp} \wp (\downarrow A \oplus C)]^{\perp} \vdash}$$

En ludique (on retient seulement les adresses des sous-formules) :

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax}{\xi.1.1 \vdash \xi.2}}{\vdash \xi.1\ ;\ \xi.2}(\xi.1, \{1\})}{\xi \vdash}(\xi, \{\{1,2\}\})$$

Revenons au premier ordre : preuve λ de $\forall x\ [A(x) \multimap A(x) \oplus C(x)]$.

• Choix : Interpréter une preuve de $[A(x) \multimap A(x) \oplus C(x)]$ par une famille de desseins $(\lambda_d)_d$ où $d \in \mathbb{D}$. On "copie" λ dans toutes les composantes ;
$\Rightarrow$ <u>nécessité d'avoir des biais qui dépendent de $\mathbb{D}$.</u>

$$\lambda_d = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}ax\ _d}{\xi.1_d.1_d \vdash \xi.2_d}}{\vdash \xi.1_d\ ;\ \xi.2_d}\,(\xi.1, \{1_d\})}{\xi \vdash}\,(\xi, \{\{1_d, 2_d\}\})$$

La preuve λ sera alors :

$$\lambda = \cfrac{\quad \ldots \qquad \cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}ax\ _d}{\xi.1_d.1_d \vdash \xi.2_d}}{\vdash \xi.1_d\ ;\ \xi.2_d}\,(\xi.1, 1_d) \qquad \ldots \quad}{\xi \vdash}\,(\xi, \{\{1_d, 2_d\}/d \in \mathbb{D}\})$$

2- Desseins pour une preuve de : $\forall x\, \forall y\, [A(x,y) \multimap A(x,y) \oplus C(x,y)]$**.**
$\Rightarrow$ biais doublement indexés $i_{d,e}$.

$$\dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax_{\ (d,e)}}{\xi.1_{(d,e)}.1_{(d,e)} \vdash \xi.2_{(d,e)}}}{\vdash \xi.1_{(d,e)}\ ;\ \xi.2_{(d,e)}}\,(\xi.1, 1_{(d,e)}) \qquad \cdots}{\xi \vdash}\,(\xi, 1_{(d,e)}, 2_{(d,e)}/(d,e) \in \mathbb{D}^2)$$

Plus généralement, pour
$\forall x_1\, \forall x_2\, \cdots \forall x_k\, [A(x_1\ x_2\ \cdots x_k) \multimap A(x_1\ x_2\ \cdots x_k) \oplus C(x_1\ x_2\ \cdots x_k)]$

$$\dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax_{\ (d_1\ \cdots d_k)}}{\xi.1_{(d_1\ \cdots d_k)}.1_{(d_1\ \cdots d_k)} \vdash \xi.2_{(d_1\ \cdots d_k)}}}{\vdash \xi.1_{(d_1\ \cdots d_k)}\ ;\ \xi.2_{(d_1\ \cdots d_k)}}\,(\xi.1, 1_{\vec{d}}) \qquad \cdots}{\xi \vdash}\,(\xi, 1_{\vec{d}}, 2_{\vec{d}}/\vec{d} \in \mathbb{D}^k)$$

L'uniformité de ces desseins provient du fait que toutes les composantes sont des "copies" d'un même dessein λ.

Mais ce n'est pas toujours le cas.

Définition : Une famille de desseins $(\mathfrak{D}_{\vec{d}})_{\vec{d}}$ est uniforme si par tout ϕ application de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, le dessein $\phi(\mathfrak{D}_{\vec{d}})$ est un sous-dessein de $\mathfrak{D}_{\phi(\vec{d})}$.

Deuxième exemple : $\forall x\ \exists y\ [R(x) \multimap R(y)]$ dans $\&_{d \in \mathbb{D}} \oplus_{e \in \mathbb{D}} \mathbb{C}_{d,e}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(x) \vdash R(x)}{\vdash \downarrow R(x)^{\perp}\ ,\ R(x)}}{[\downarrow R(x)^{\perp} \wp R(x)]^{\perp} \vdash}}{\vdash \exists y\ [\downarrow R(x)^{\perp} \wp R(y)]}}{\forall x\ \exists y\ [\downarrow R(x)^{\perp} \wp R(y)]^{\perp} \vdash} \quad \text{soit} \quad \dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax\ _d}{\vdash \xi.1_d.1_d.1,\ \xi.1_d.1_d.2}}{\xi.1_d.1_d \vdash}}{\vdash \xi.1_d} \qquad \cdots}{\xi \vdash}$$

Un dessein non uniforme dans $\&_{d\in\mathbb{D}} \oplus_{e\in\mathbb{D}} \mathbb{C}_{d,e}$ serait :

$$\dfrac{\cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}ax}{\vdash \xi.1_d.1_e.1,\ \xi.1_d.1_e.2}}{\xi.1_d.1_e \vdash}}{\vdash \xi.1_d} \qquad \cdots}{\xi \vdash}$$

Bibliogaphie

- Andréoli, J.-M. (1992) Logic Programming with focusing Proofs in Linear Logic.
- Curien, P.-L. (2001) Introduction à la logique. http://www.pps.jussieu.fr/˜curien
- Girard, J.-Y. (2001) Locus Solum. *Mathematical Structures in Computer Science* **11** (3) pp 301-506
- Girard, J.-Y. (2004) From Fondation to Ludics. Ehrhard, T., Girard, J.-Y. and Scott, P. *Linear Logic in Computer Science,* London mathematical Society, Lectures Notes Series, Cambridge University Press.
- Faggian, C., Fleury-Donnadieu, M.-R. and Quatrini, M. (2004) An introduction to uniformity in Ludics. ... *Linear Logic in Computer Science,* ... même livre
- Fleury, M.-R. and Quatrini, M. (2004) First order in Ludics. (2004) *Mathematical Structure in Computer Science* **14** pp 189-213